C. SABENA

QUADERNO ROSSO

PROGETTO STRATEGICO DEL C.N.R.

TECNOLOGIE E INNOVAZIONI DIDATTICHE

INNOVAZIONI DIDATTICHE PER LA MATEMATICA

L'ALGEBRA COME STRUMENTO DI PENSIERO
Analisi teorica e considerazioni didattiche

Ferdinando Arzarello
Dipartimento di Matematica - Università di Torino
Luciana Bazzini
Dipartimento di Matematica - Università di Pavia
Giampaolo Chiappini
Istituto per la Matematica Applicata - C.N.R Genova

Quaderno n° 6

1994

Questo quaderno è stato stampato con il finanziamento del C.N.R. contratto numero n° 86.027776.33, in un numero limitato di copie per uso interno dei nuclei e non è in vendita.
Coloro che desiderassero ottenerne una copia possono richiederla al Nucleo di Ricerca Didattica, Dipartimento di Matematica, Università di Pavia, Via Abbiategrasso 209, 27100 Pavia.

Prefazione

Il quaderno espone in forma compatta le ricerche condotte dagli autori negli ultimi due anni sui problemi dell'apprendimento algebrico.

Viene presentato un modello teorico di tale apprendimento, basato sulle cosidette semantiche intensionali, realizzato per spiegare alcuni dei principali misconcetti ed errori che caratterizzano l'attività degli studenti, dalla scuola media all'università, e per descrivere i processi di pensiero che accompagnano le attività di costruzione e manipolazione delle espressioni algebriche.

Dal punto di vista cognitivo il modello è coerente con un approccio al complesso rapporto tra pensiero e linguaggio basato sull'assunzione che il pensiero algebrico non possa esistere al di fuori del linguaggio attraverso il quale prende forma e si esprime.

Ne consegue un modello di didattica dell'algebra che abbiamo chiamato "gioco delle interpretazioni", in cui la costruzione del sapere matematico si intreccia con la negoziazione sociale in classe del significato delle espressioni simboliche usate dagli allievi per risolvere problemi. Nel lavoro, attraverso alcuni esempi, cerchiamo di esporre le linee generali di tale metodo.

Mandando alle stampe il presente quaderno siamo consapevoli che molto lavoro rimane da fare, in particolare per quanto riguarda una puntuale trasposizione curricolare di tale metodo all'interno di precisi itinerari didattici per la scuola media e per le superiori. Per questo occorre un contributo più massiccio di chi nella scuola opera e, pertanto, invitiamo quanti fossero interessati a tale lavoro a prendere contatto con uno degli autori.

Il lavoro di ricerca che presentiamo in questo volume è suddiviso in tre parti.

La prima parte inquadra la nostra ricerca nell'ambito della corrente letteratura.

La seconda parte illustra il modello dell'apprendimento algebrico che abbiamo realizzato.

La terza parte affronta alcune problematiche didattiche, alla luce del modello presentato.

Le varie tesi proposte nel lavoro sono sempre discusse da un punto di vista teorico (con la semantica intensionale) e illustrate concretamente con esempi significativi, desunti da concrete esperienze in cui gli autori sono stati e sono coinvolti, sia all'interno dei Nuclei di Ricerca Didattica delle Università di Torino e di Pavia o dell'Istituto per la Matematica Applica del CNR di Genova, sia nell'ambito dei seminari didattici afferenti all'indirizzo didattico dei corsi di laurea in matematica nelle relative Università. In particolare, ringraziamo gli studenti dei seminari didattici del Corso di Matematiche Elementari da un punto di vista superiore dell'Università di Torino, che hanno eleborato ed analizzato molti dei protocolli esposti nella seconda parte.

Un ringraziamento particolare al prof. Boero, per le sue puntuali osservazioni alle versioni preliminari del lavoro, e ai proff. Malara, Marchini, Morini, per l'invito a tenere una relazione per il IX Seminario Nazionale di Didattica della Matematica (Pisa, 5 - 7 novembre 1992) sull'insegnamento e apprendimento dell'algebra nella scuola dell'obbligo. Tale seminario fu l'occasione per mettere a confronto le ricerche degli autori su tali argomenti e segnò il punto di partenza per un lavoro comune di ricerca, che ora si concreta in questo quaderno, e per un sodalizio ideale, che si auspica duraturo negli anni.

Pavia, 9 dicembre 1993

Ferdinando Arzarello
Luciana Bazzini
Giampaolo Chiappini

"........
Ebbene, fra il ragionamento grossolano, che anche a chi è ignaro del calcolo pur fa prevedere in molti casi l'andamento di certi fenomeni ed il meccanismo delle forze che li governano, ed il ragionamento sottile del geometra che, da un insieme artifizioso di simboli algebrici, in una maniera che spesso desta meraviglia anche nei più esercitati e rotti alle disquisizioni analitiche, giunge al resultato che precisa l'andamento degli stessi fenomeni naturali, non corre quel divario che a tutta prima parrebbe. Anzi, se esaminiamo le cose con accuratezza, si vedrà che quest'ultimo sottile procedimento non è altro che il primo rozzo ragionamento più perfezionato e affinato. Ed oltre a ciò si può dire che nella mente del geometra quel primo rozzo ragionamento ha preceduto il calcolo e lo ha guidato, indicandogli su per giù dove doveva arrivare e quanto gli era permesso tentare. In certo modo esso rappresenta la greggia armatura su cui l'intero edificio analitico è costruito. Ma quando noi vediamo il lavoro compiuto, ci troviamo di fronte ad un monumento magnifico che è già stato spogliato di tutti i ponti e i sostegni. I puntelli che hanno servito a reggere la cupola in costruzione sono spariti, ed essa appare agli occhi meravigliati di chi la guarda come un miracolo di costruzione.
......."

(Vito Volterra, 1920)

PARTE PRIMA

TEMI E PROBLEMI DELLA RICERCA DIDATTICA IN ALGEBRA

1.0 Introduzione.

Alla domanda che molti insegnanti si pongono su cosa e come insegnare di algebra, recenti ricerche in didattica della matematica stanno cercando di dare risposta attraverso un'analisi dei contenuti dell'algebra, delle caratteristiche del pensiero algebrico, dei processi cognitivi indotti e degli ostacoli epistemologici, cognitivi e didattici. Da queste analisi, condotte su diversi fronti con pluralità di stili e metodi, emerge abbastanza chiaramente l'idea generale che l'algebra non è e non deve essere presentata come una collezione di trucchi, ma come uno strumento e un oggetto di pensiero.

L'insegnamento dell'algebra, come del resto l'insegnamento della matematica in generale, deve essere orientato a promuovere la comprensione di concetti e l'organizzazione del pensiero. Per tradizione l'algebra ha un posto di rilievo nel curriculum di matematica: per molti studenti l'introduzione del simbolismo algebrico, con i suoi aspetti ideografici e trasformativi, rappresenta da una parte lo stacco dai problemi studiati per anni nell'ambito dell'aritmetica e dall'altra l'inizio di studi matematici più avanzati.

Pochi studenti contestano l'importanza dell'algebra, anche se molti non ne coltivano che un'idea superficiale e riduttiva, a volte persino deviante.

Il pensiero algebrico è considerato astratto (l'algebra è stata definita da B.Russell come il sorriso del gatto del Cheshire in "Alice nel Paese delle Meraviglie", sorriso che rimane dopo che il gatto è scomparso); inoltre il pensiero algebrico è inscindibile dal linguaggio formalizzato con cui si esprime e dalle sue manipolazioni. Tuttavia è limitativo pensare che esso viva solo a questo livello, altrimenti tutto si ridurrebbe ad una serie di meccanismi manipolativi, i quali, chissà perché, il più delle volte non funzionano in mano agli allievi.

Il formalismo algebrico è fondamentale nell'apprendimento della matematica. Per "formalismo algebrico" intendiamo il sistema di segni e regole sintattiche che governano la costituzione e la trasformazione delle espressioni simboliche in algebra. Come osserva Boero [92], esso si organizza a partire dai segni relativi alle quattro operazioni aritmetiche e al segno "=", con le relative regole d'uso. La sua padronanza richiede la capacità di

governare le sue principali funzioni (stenografica, di sintesi , di generalizzazione, di individuazione, di trasformazione), costruendo e interpretando le relative espressioni simboliche in accordo al carattere ideografico del linguaggio algebrico.

Si può osservare che, nonostante il maggior rilievo dato alle funzioni stenografica e di generalizzazione, sono principalmente le funzioni di individuazione e di trasformazione che permettono alla matematica di essere non solo un linguaggio adatto a descrivere la realtà ma anche un potente strumento di ragionamento e previsione attraverso la "messa in formula" di conoscenze (o ipotesi) sui fenomeni e la derivazione (mediante trasformazioni consentite dal formalismo algebrico) di nuove conoscenze sui fenomeni stessi.

E' importante sottolineare che, per effetto della funzione di sintesi si può stravolgere quella corrispondenza uno a uno tra pensiero e formula, tra linguaggio naturale e linguaggio simbolico Laborde [82], tipica della funzione stenografica. Questa viene superata: la struttura del linguaggio diventa ideografica.

Già a livello di problemi di aritmetica, la traduzione del pensiero nel nuovo linguaggio, quello dei numeri e delle operazioni, può perdere il carattere puramente stenografico (cfr. 3.1).

La funzione ideografica del formalismo algebrico mette chiaramente in luce i diversi modi di operare del linguaggio naturale e del linguaggio formale. La consonanza dei due linguaggi, presente nella funzione stenografica, può scomparire nella traduzione ideografica, fino a diventare dissonanza. Ciò può essere causa di tensione tra i due linguaggi e fonte di ostacoli e difficoltà, come vedremo più avanti.

1.1 Aspetti storico-epistemologici.

Un'analisi retrospettiva dello sviluppo storico dell'algebra, questa tarda venuta (Chevallard [89]), induce a domandarsi perché essa sia rimasta indietro rispetto alla geometria per così molti secoli, con un decollo difficoltoso del suo simbolismo: eppure avrebbe dovuto raccogliere l'eredità accumulata dall'aritmetica, e mettere le ali allo spirito, come Peano osservava in termini metaforici.

Inoltre è interessante interrogarsi se e in quale misura esistano legami tra gli ostacoli incontrati dallo sviluppo storico della disciplina e le difficoltà con cui gli studenti ogni giorno si confrontano. Studi sperimentali al riguardo (Harper [87]; Sfard [92]) sembrano confermare la tesi piagetiana di convergenza tra lo sviluppo storico e quello individuale (Garcia e Piaget [89]). Le difficoltà incontrate dal soggetto che apprende possono essere molto vicine a quelle sperimentate da generazioni di matematici.

Di particolare interesse a questo proposito è l'analisi storico-psicologica presentata da A.Sfard al recente congresso ICME 7 (Quebec, 1992). Tale analisi si basa sulla considerazione che in tutte le branche della matematica sono chiaramente evidenziabili due tipi di componenti: quella relativa ai processi computazionali e quella relativa agli oggetti astratti (Skemp [71]; Sfard [91]). Le due componenti, essenzialmente diverse ma complementari, sono come le facce opposte di una stessa medaglia. Ad esempio, un numero, così come ogni altro concetto matematico, può essere concepito in due modi: operativamente, cioè come processo, e strutturalmente, cioè come oggetto (2+3 posso intenderlo come processo di calcolo o come numero).

In un certo senso, gli oggetti astratti non sono altro che un modo alternativo di riferirsi ai processi computazionali; i numeri naturali e i razionali rimandano ai procedimenti di conteggio e di misura, come del resto i negativi e i complessi rimandano, rispettivamente, alle operazioni di sottrazione da un numero più piccolo e di estrazione di radice quadrata da un numero negativo. Così, si potrebbe dire che i numeri razionali, irrazionali, negativi e complessi non sono altro che incarnazioni mature di certi processi computazionali. La storia dell'algebra moderna, con la nascita della teoria degli ideali e la contrapposizione tra i metodi computazionali di Kronecker e quelli astratti di Dedekind evidenzia come questa dialettica sia tipica dello sviluppo di questa disciplina anche nei suoi aspetti più astratti.

Considerare quindi un'entità matematica come un oggetto significa potere riferirsi ad esso come a qualcosa di reale, a una struttura statica, esistente da qualche parte nello spazio e nel tempo. Per contrasto, interpretare una nozione come processo implica il considerarla come entità potenziale piuttosto che attuale: essa viene ad esistere su richiesta, in una successione di azioni. Così, mentre la concezione strutturale è statica (o, meglio, "senza tempo"), istantanea e integratrice, la concezione operativa è dinamica, sequenziale e dettagliata (Sfard [91]).

Osservando lo sviluppo storico, si vede invariabilmente che nuovi numeri entrano in scena non appena certi processi computazionali non standard cominciano ad ottenere riconoscimento. Lo sviluppo del concetto di numero si può vedere come lo svolgimento di una catena di passaggi dalle concezioni operative a quelle strutturali. D'altra parte, anche prima che i processi generatori di nuovi numeri fossero considerati come oggetti, i matematici li usavano e li combinavano in operazioni più complesse.

Analogamente a quanto avvenuto nella storia, anche il processo di apprendimento cognitivo avviene in un delicato 'interplay' tra concezioni operative e strutturali della stessa nozione. Sfard sottolinea in particolare il momento della interiorizzazione del processo (che quindi diventa facilmente rappresentabile), il momento di condensazione (quando ci si può riferire al processo come a qualcosa che avviene in una scatola nera) e il momento della reificazione in cui si trasformano le operazioni computazionali in entità permanenti (oggetti). Per esempio, il numero complesso nasce nel momento in cui l'allievo diventa capace di vedere il processo di estrazione di radice quadrata di un numero negativo come un'entità "reale", come una cosa. Si può identificare una gerarchia: nel tempo le operazioni effettuate su certi oggetti astratti generano nuovi oggetti che servono come input alle operazioni nel livello successivo (v. Fig. 1). Relativamente ad una data nozione, possiamo distinguere tra processo primario , che porta alla concezione strutturale della nozione stessa, e processo secondario, quello che opera sulla nozione intesa come oggetto.

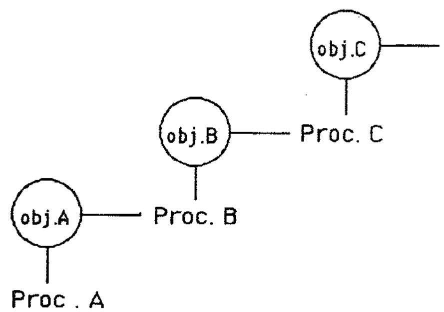


Fig. 1

Ovviamente questo modello, come ogni altro modello teorico, mette in luce alcuni aspetti e ne adombra altri.

Osserviamo inoltre che la teoria della reificazione presenta somiglianze con altri modelli di sviluppo cognitivo, che adottano altre terminologie; per esempio si parla di "reflective abstraction" in Beth e Piaget [66], di entità concettuali in Greeno [83].

Anche Freudenthal ([73], [78]) era stato fautore di una visione della matematica come gerarchia di prospettive alternanti e ne aveva visto il processo di apprendimento come composto di livelli in cui la matematica agita ad un livello diventa matematica osservata nel livello successivo. Secondo Freudenthal sono proprio i momenti di discontinuità , cioè quelli in cui avviene un salto, a richiedere la maggiore attenzione.

Osserviamo che il termine "condensazione" era già stato usato da Arzarello ([90], [91b]) con una connotazione diversa da quella usata da Sfard (si veda § 2.4.1).

Vediamo dunque come nell'evoluzione del pensiero algebrico ci sia stato un costante sforzo di transizione da procedure computazionali a oggetti matematici: un faticoso cammino di reificazione che si riflette nelle difficoltà riscontrate dal singolo nel cammino verso l'astrazione.

Molti autori concordano nell'affermare che le prime origini del pensiero algebrico sono individuabili nel momento in cui appare lo sforzo di trattare un processo computazionale in modo più generale. Nonostante questa visione concorde dell'algebra come scienza dei processi generalizzati, alcuni autori individuano nell'uso delle notazioni simboliche le carattestiche fondamentali del pensiero algebrico, mentre altri ritengono che il simbolismo algebrico non sia l'unico mezzo per realizzare processi di generalizzazione. Secondo questa visione, il pensiero algebrico comincia prima del simbolismo.

D'altra parte, poichè è almeno vero che il pensiero algebrico è favorito dall'uso di un simbolismo opportuno, nella storia dell'algebra ha importanza non solo la storia dei concetti, ma anche quella del sistema dei simboli usati per esprimere i medesimi.

Per quanto riguarda quest'ultimo, come è ben noto, si possono individuare con G.H.Nesselmann [1843] tre stadi distinti:

I) fase retorica (anteriore a Diofanto di Alessandria, 250 d.C.), tutta a parole, senza simboli;

II) fase sincopata (da Diofanto che l'iniziò, alla fine del sec. XVI) , che vede l'introduzione di abbreviazioni per le incognite, ma i calcoli sono eseguiti tutti in lingua naturale. Diofanto introduce i simboli per l' incognita e le sue prime potenze nell'introduzione alla sua opera "Aritmetica", ma poi di fatto usa un'algebra completamente retorica

III) fase simbolica (introdotta da Viète, 1540-1603) in cui si usano lettere per tutte le quantità, incognite o meno, e si usa l'algebra non solo per andare a caccia del valore dell'incognita, come nella fase II, ma per provare regole che legano le varie quantità ed esprimere così le soluzioni generali.

Non si deve però pensare che l'avvento dell'algebra sincopata abbia soppiantato di colpo quella retorica così come l'algebra simbolica non ha sostituito di colpo quella sincopata.

L'algebra retorica, detta anche verbale, fu praticata dagli inizi fino al XVI secolo, prefigurando una veste algebrica a contesti geometrici, usando per esempio i segmenti come variabili. E' un far matematica in modo operativo e verbale: il mezzo verbale perpetua il pensiero operativo e agevola il controllo semantico.

Non c'è dubbio che il pensare in termini operativi può causare un aggravio della memoria ed essere quindi meno efficiente dell'economia di pensiero indotto dalle notazioni simboliche. Sarebbe quindi ragionevole aspettarsi che, nel momento in cui lo studente accede al simbolismo algebrico, egli vi faccia ricorso in ogni possibile contesto.

Studi sperimentali (Clement, Lochhead e Soloway, [79]; Soloway, Clement e Lochhead, [82]; Laborde [82]) hanno rilevato che persino studenti con alle spalle parecchi anni di algebra simbolica preferiscono usare i metodi verbali piuttosto che quelli simbolici.

Come osservato dalla Laborde, lo sviluppo di un linguaggio simbolico specializzato può spogliare di significato il linguaggio in cui l'attività algebrica si era precedentemente espressa. L'algebra retorica e quella sincopata erano abbastanza facili da seguire e da capire. Ma il salto ad un sistema simbolico può nascondere i significati dei termini e delle operazioni che agiscono su di essi. Il linguaggio simbolico ha il potere di rimuovere molte delle distinzioni che il linguaggio naturale preserva, espandendo in questo modo la sua applicabilità. Ne risulta una certa debolezza semantica: allo studente può sembrare che questo linguaggio, che si adatta a tutti i contesti, non appartenga in realtà a nessuno.

Lo scollamento tra linguaggio simbolico e significato del contesto risulta evidente da alcuni lavori di Clement e altri (Clement [82]; Clement, Lochhead e Monk [81]; Clement, Lochhead e Soloway [79]), che riferiscono di uno studio svolto su un campione di 150 studenti del primo anno di Ingegneria. Sono state analizzate le risposte ai seguenti problemi:

- *Usando le variabili S e P scrivi un'equazione che rappresenti la seguente affermazione: "In questa Università gli studenti sono sei volte i professori." Usa S per indicare il numero degli studenti e P per indicare il numero dei professori.*

- *Usando le variabili C e S scrivi un'equazione che rappresenti la seguente affermazione: "Al ristorante Mindy, per ogni quattro persone che ordinano cheesecake ce ne sono cinque che ordinano strudel." Indica con C il numero dei cheesecake e con S il numero degli strudel.*

Si è riscontrata una percentuale del 63% di risposte corrette al primo problema, e una percentuale del 27% nel secondo. In entrambi i casi la grande maggioranza delle risposte scorrette era del tipo $6S=P$ e $4C=5S$ rispettivamente.

Questi risultati sono stati confermati da studi di Lochhead [80]; inoltre la percentuale di risposte scorrette è aumentata nel momento in cui si richiedeva di interpretare un'equazione data ($M=7S$, con M=n° montatori, S=n° saldatori in una fabbrica), invece di generarla (Mestre e Lochhead [83]).

Trova dunque conferma l'ipotesi dell'esistenza di rigidità nell'uso stenografico del codice algebrico, che conferma il suo scollamento dalla semantica; solo quando ricorrono all'algebra retorica o sincopata gli studenti sembrano essere in grado di mantenere un certo controllo dei significati. Il metodo "retorico" sembra essere usato spontaneamente, indipendentemente dall'istruzione , con precedenza del pensiero operativo su quello strutturale.

Uno studio di Harper [87] ha evidenziato un possibile parallelismo tra l'evoluzione storica dell'algebra attraverso le tre fasi sopra descritte, e lo sviluppo cognitivo del soggetto.

Storicamente un progresso fondamentale si è avuto con l'opera di Viète, caratterizzata dall'introduzione sistematica delle lettere nei problemi algebrici,

sia per le quantità conosciute che per quelle incognite: cosa che rappresenta il principale vantaggio di trattare il caso generale e non i casi particolari, di interessarsi alla struttura dei problemi piuttosto che alla loro espressione.

Solo con l'introduzione dei parametri, intere famiglie di problemi possono essere trattate per mezzo di procedure concise: un salto di qualità notevole, di cui Viète stesso fu consapevole. Egli descrisse infatti l'aritmetica come scienza dei numeri concreti (logistica numerosa) e la sua algebra come scienza delle specie (logistica speciosa), cioè scienza dei tipi di cose piuttosto che delle cose medesime.

L'avvento dell'algebra simbolica offrì ai matematici i mezzi per trattare grandezze variabili e non solo quantità costanti, il che determinò un grosso impatto anche sulla geometria: basti ricordare l'introduzione della geometria analitica, soprattutto ad opera di Cartesio e Fermat.

Oggi l'idea di variabile come numero qualunque ci sembra così ovvia e semplice che stentiamo a capire perché tardò così tanto ad affermarsi. Ma se riflettiamo un momento sul processo di pensiero che viene attivato, scopriamo che si tratta di un pensiero in termini funzionali e richiede perciò l'abilità di pensare simultaneamente su intere famiglie di numeri piuttosto che su una qualsiasi quantità specifica, nonchè sulle reciproche relazioni tra famiglie di numeri.

1.2 Aspetti epistemologico-didattici.

Per quanto riguarda la tensione dialettica tra l'aritmetica dei significati e l'algebra dei segni, il che ha costituito in passato e costituisce tuttora oggetto di dibattito, ci sembra interessante l'analisi epistemologico-didattica compiuta da Chevallard [89]. Chevallard osserva che l'algebra, fin dalla sua nascita, era considerata un elemento culturale inaccessibile ai più proprio perché veniva dopo l'aritmetica. L'opposizione aritmetica-algebra, che riprende nel registro didattico lo sviluppo storico dei due campi del sapere, realizza concretamente ciò che si può definire la dialettica del vecchio e del nuovo. In questa prospettiva, l'aritmetica si presenta come un prerequisito che permette l'introduzione dello strumento algebrico e gli dà senso e portata. La parte comune, messa in evidenza da una certa tradizione didattica, è costituita da un certo corpo di problemi, per la risoluzione dei quali l'aritmetica e l'algebra propongono approcci diversi.

In genere si parte da un problema tradizionale di aritmetica; un esempio può essere il seguente:

"Trovare tre numeri la cui somma sia 164, tali che il secondo superi il primo di 14 e che il terzo sia la somma dei primi due."

La soluzione aritmetica può essere:

"La somma 164 dei tre numeri si compone di:
1) Primo numero
2) Primo numero aumentato di 14
3) Due volte il primo numero più 14.
Si ha cioè quattro volte il primo numero aumentato di 28. Se dunque si toglie 28 da 164, il resto (136) varrà il quadruplo del primo numero e di conseguenza 136:4, cioè 34. Il primo numero è 34, il secondo 48 e il terzo 82".

La soluzione algebrica è:

$$x + x + 14 + x + x + 14 = 164$$
$$4x + 28 = 164$$
$$x=34$$

Osserviamo che la soluzione aritmetica è basata sul linguaggio ordinario arricchito di un linguaggio numerico. Inoltre la soluzione aritmetica si presenta come un discorso: il "saper fare" aritmetico è essenzialmente un "saper fare" orale.

Chevallard osserva che l'aritmetica si oppone all'algebra come l'orale allo scritto. Certo, il discorso aritmetico si può scrivere (e per necessità si scrive) e il "discorso" o piuttosto la scrittura algebrica si può leggere (e per necessità si legge). Ma ciascuno occupa un registro, orale o scritto, che gli è proprio.

Nell'esempio considerato si vede come l'iniziazione all'algebra si appoggia sulla tradizione e sulle conoscenze fornite dall'aritmetica: il nuovo si modella sull'antico.

L'aritmetica produce un discorso in cui sono incastonati dei "ragionamenti", l'algebra elabora scritture che sono i "vettori" del calcolo. In questa ottica, l'algebra riduce il ragionamento al calcolo: il gioco dei segni, se

puramente meccanico, mette in fuga il pensiero. Il controllo della ragione sul pensiero si fa controllo meccanico, regolato da un gioco di segni. Il raziocinio interviene solo nella scelta dell'incognita, nella messa in equazione e nella risoluzione dell'equazione. Ma quest'attività ha ben poco di nobile e non si è lontani da quest'altra conclusione: sotto le "grazioserie" dell'aritmetica c'è solo la meccanica nuda e cruda che l'algebra rileva e che lo "chatoiment" (gatteggiamento) delle parole dissimula. Così, mentre si cerca di avvicinare aritmetica e algebra al fine di smussarne il passaggio, di fatto si va contro l'aritmetica e anche contro l'algebra, per l'incapacità di mostrare dove la seconda supera la prima.

Osserva ancora Chevallard: "Il ragionamento, se resta, si rifugia allora nella concatenazione dei discorsi aritmetici o, algebricamente, nella successione delle trasformazioni pertinenti. Il bottino è magro. Il re è nudo." (p.23). E ancora, attraverso un'immagine poetica, lo stesso autore osserva che "intellettualmente, per generazioni, l'aritmetica è stata il paradiso verde degli amori infantili, il latte e il miele dello spirito che si apre, per suo tramite, all'incanto di un'attività intellettuale riflessa, padroneggiata e felice. ... Così l'aritmetica, troppo bene appresa, veniva a fare da ostacolo, intellettuale, affettivo e ideologico, al suo superamento."(p.6).

In conclusione, secondo Chevallard, è solo a partire dall'introduzione dei parametri che l'algebra può rivaleggiare con l'aritmetica e superarla.

In questo senso Newton potrà considerare l'algebra come aritmetica universale:

"Il calcolo si fonda o sui numeri, come nell'Aritmetica volgare, o sulle lettere come nell'Analisi. Questi due procedimenti si fondano sugli stessi principi e conducono allo stesso risultato; l'Aritmetica in modo definito e particolare, l'Algebra in modo indefinito e universale. Ma, in quest'ultimo metodo, quasi tutti gli enunciati e soprattutto le conclusioni sono teoremi veri.

L'Aritmetica va dal conosciuto allo sconosciuto; l'Algebra, al contrario, va spesso dallo sconosciuto al conosciuto, in modo che in qualunque maniera arrivi a una conclusione o equazione, si possa sempre arrivare alla conoscenza della quantità sconosciuta. Con questo metodo si risolvono problemi molto difficili, di cui si cercherebbe invano la soluzione coi soli mezzi dell'Aritmetica. Nello stesso tempo L'Aritmetica è talmente indispensabile in tutte le operazioni dell'Algebra, che solo la loro unione forma la scienza completa del calcolo." (sottolineatura nostra, un po' maliziosa).

La concezione qui esposta da Newton nella sua "Aritmetica Universalis" risale d'altra parte a Viète stesso, che aveva concepito la sua opera come tesa a rivalutare l'apporto degli antichi (ad es. Pappo ed altri), supposto in parte perduto, e nel quale egli percepiva una dialettica fondamentale tra analisi e sintesi.

Molto più tardi, Poinsot (1777-1859) scriverà che l'Algebra elementare non è altro che un'Aritmetica generalizzata. Numeri particolari tendono a numeri qualunque e le operazioni attuali che si possono eseguire tendono a operazioni che si indicano solo con segni. In questo modo, si pensa meno a stabilire il risultato delle operazioni ma si è più interessati a scoprire delle formule per la soluzione di tutti i problemi dello stesso tipo.

A sostegno di questa tesi, Chevallard cita il seguente esempio, preso da un trattato di Elementi di Algebra di un anonimo della fine del secolo XVIII:

"Dividere un numero dato in due parti tali che la prima parte superi la seconda di un numero dato".

L'autore mostra dapprima come l'aritmetica , cioè il ragionamento orale, permette di formulare la soluzione:

"La parte più piccola è uguale alla metà del numero da dividere, meno la metà dell'eccesso dato".

Poi considera un esempio numerico: il numero da dividere sia 9, l'eccesso dato sia 5. Allora la parte più piccola è 2, la più grande è 7.

Quindi indica con le lettere le quantità conosciute: sia a il numero da dividere e b l'eccesso. Allora si può stabilire che, indicando con x la parte più piccola, è

$x = a/2 - b/2$.

Questa uguaglianza indica chiaramente quali sono le operazioni da effettuare su non importa quali valori numerici particolari di a e di b per determinare il valore dell'incognita x.

Secondo Chevallard, è solo a questo prezzo che l'algebra prende i suoi pieni poteri e si pone come rivale dell'aritmetica, giustificando così la pretesa di sorpassarla fornendo i mezzi di un'aritmetica generalizzata. Rinunciare ai parametri sarebbe, per l'algebra elementare, rinunciare alla sua essenza.

Questo salto di natura epistemologica non sempre viene evidenziato dalla didattica dell'algebra. Da una parte può succedere che il forte distacco qualitativo tra l'aritmetica e l'algebra sia narcotizzato, dall'altra può capitare di perdere l'occasione di vedere nell'aritmetica quelle caratteristiche che costituiscono una buona propedeuticità all'apprendimento dell'algebra.

E' invece importante preparare bene il terreno affinchè l'algebra sia vista e appresa non come una macchina che gira a vuoto su segni lontani dai referenti semantici dell'aritmetica, ma piuttosto come generalizzazione e superamento dell'aritmetica, con tutte le potenzialità che questo comporta.

Questo significa non ignorare la continuità con l'aritmetica. Lo studio dell'algebra deve tener conto delle sue profonde, storiche radici nell'aritmetica, terreno naturale su cui costruire i successivi sviluppi. Già ai primi livelli di scolarità, all'inizio dell'uso del simbolismo, il bambino deve cominciare a capire che può tradurre il suo pensiero in un linguaggio diverso da quello naturale. Anche se ancora non pensa in questa nuova lingua, ma traduce soltanto, il bambino deve capire che la nuova lingua ha regole sue proprie, che vanno rispettate. Come abbiamo già osservato, la traduzione può avere il carattere di una stenografia o di una ideografia e può esserci consonanza o dissonanza tra linguaggio naturale e scrittura simbolica. Certi problemi aritmetici possono risultare in dissonanza (sia per motivi sintattici che semantici) con i modelli concettuali standard degli allievi, fortemente integrati in un linguaggio sincopato di tipo aritmetico. Per risolvere questi problemi gli allievi devono ristrutturare di continuo i loro modelli, spesso trovando, proprio in questi ultimi, forti ostacoli al processo di ristrutturazione. Quando la ristrutturazione avviene, l'aritmetica contiene già il germe dei problemi algebrici.

1.3 Difficoltà e misconcezioni nell'apprendimento dell'algebra.

Molti errori riscontrabili nei protocolli degli allievi affondano le loro radici nel rapporto dialettico, mai superato, tra aspetti procedurali e aspetti strutturali, riscontrabili rispettivamente ma non esclusivamente nell'aritmetica e nell'algebra.

Nella letteratura (Booth [84], [88]) sono riportati comportamenti tipici di allievi che si sono trovati in difficoltà di fronte a problemi che non ammettevano, come risposta, un numero.

I problemi proposti erano del tipo:

1. "Una navicella spaziale viaggia per "stadi" che sono tutti della stessa lunghezza:

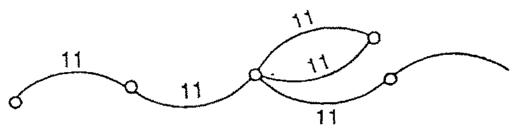


Fig. 2

Se ogni stadio è lungo 11 anni luce, come potresti descrivere la distanza percorsa dalla navicella in y stadi?"

2. "Come potresti rappresentare il perimetro di questa figura, sapendo che una parte non è disegnata e che ci sono n lati, ciascuno di lunghezza 5?

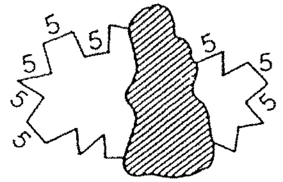


Fig 3

In questi problemi è stata riscontrata una forte riluttanza, in allievi di 14 anni, a desistere dal ricercare un numero come risposta e accettare invece, come risposta, un'espressione contenente un'incognita.

Uno studio recente di Bednarz e collaboratori [92] ha focalizzato l'attenzione sull'analisi delle strategie spontanee osservate in studenti di 14-15 anni, che avevano seguito un anno di corso di Algebra. L'analisi rileva che le differenze tra le basi concettuali che sottostanno alle soluzioni di tipo aritmetico o algebrico si riflettono in differenti rappresentazioni del problema stesso. Nelle soluzioni di tipo aritmetico, le operazioni fatte su quantità conosciute richiedono un costante controllo semantico delle quantità in rapporto alla situazione. Nelle soluzioni di tipo algebrico, le relazioni espresse nel problema sono integrate fin dall'inizio in un'espressione statica del problema stesso, il che richiede nondimeno una sua specifica rappresentazione.

Uno studio di Boero e Shapiro [92], rivolto ad analizzare l'influenza di alcuni fattori sulle strategie di soluzione di problemi aritmetici con più di

un'operazione, mette in luce la prevalenza di strategie anticipatorie, che gli autori chiamano "pre-algebriche", in allievi che avevano ricevuto un'istruzione "non tradizionale", che li aveva cioè incoraggiati verso una varietà di strategie senza rigide richieste di formalizzazione e schematizzazione. Si avanza l'ipotesi che una vasta esperienza di "pensiero anticipatorio" possa favorire la scelta di strategie pre-algebriche: gli allievi, al fine di economizzare gli sforzi, pianificano operazioni che riducono la complessità del lavoro mentale.

La letteratura lascia comunque irrisolto quali specifiche connotazioni assuma nel contesto algebrico il pensiero anticipatorio, che è presente in tutto il pensiero matematico.

Nel rapporto tra aritmetica e algebra occorre tener conto del fatto che molti simboli e segni sono comuni. Nonostante l'apparente continuità, l'interpretazione data a questi simboli può essere diversa.

Per esempio nella scuola elementare il segno /=/ tradizionalmente è usato per esprimere il risultato di un'operazione.

In problemi del tipo:

"Daniele è andato dalla nonna e ha ricevuto in regalo 1000 lire.
Poi ha comprato un libro del costo di 2300 lire. Ora ha 1500 lire.
Quanti soldi aveva prima di andare dalla nonna?"

è frequente riscontrare soluzioni del tipo:

1500+2300=3800-1000=2800

La simmetria e la transitività dell'uguaglianza sono palesemente violate. Il segno /=/ è inteso come "dà", cioè come un segno direzionale da sinistra a destra (Kieran [81]). L'allievo cerca di rappresentare con il segno /=/ la successione temporale delle sue operazioni mentali, finendo per distorcere, in funzione delle sue necessità, un segno che gli era stato presentato con ben altro significato.

Sempre dalla radice aritmetica sembrano derivare altri ostacoli cognitivi descritti in letteratura. Uno di questi sembra essere dovuto alla "mancanza del referente numerico" per la lettera (Davis [75], Wagner [81]): se l'allievo non vede le lettere come rappresentative di numeri, allora l'operare su di esse perde totalmente di significato.

Un'altra difficoltà sembra derivare dal diverso significato che la giustapposizione di due numeri ha in aritmetica e in algebra (Matz [79]). Se in aritmetica l'accostamento di due cifre denota un'addizione (43=40+3), in algebra l'accostamento denota moltiplicazione (4a=4xa).

L'aspetto procedurale può fungere da ostacolo a produrre una soluzione che non sia un numero: difficoltà che Collis [74] aveva chiamato "difficoltà nell'accettare la mancanza di chiusura".

Nei lavori di Davis [75] si parla del "dilemma nome-processo", intendendo con questo il fenomeno secondo cui l'allievo non distingue precisamente il nome della cosa e la cosa stessa, il processo che genera il prodotto.

Per ovviare a questi tipi di errori sono interessanti alcuni esperimenti costruiti da Chalouh e Herscovics [88], basati su un'introduzione delle espressioni algebriche come risposte a problemi di facile visualizzazione. L'uso delle lettere avviene gradualmente, dapprima introducendo le lettere come quantità nascoste, poi come quantità sconosciute.

I due ultimi tipi di difficoltà saranno discussi con una certa ampiezza nella terza parte.

Si evidenzia ancora prevalenza dell'aspetto procedurale operativo nella tendenza, documentata da Kieran [88] e da Filloy e Rojano [89] a risolvere equazioni del tipo ax+b=c. In particolare Filloy e Rojano parlano di "taglio didattico" quando gli allievi sono posti di fronte a equazioni del tipo ax+b=cx+d. Qui soluzioni di tipo aritmetico, valide per le equazioni del tipo ax+b=c diventano macchinose e impraticabili. Occorre infatti operare su ciò che è espresso nell'equazione mediante un approccio strutturale.

Altri errori ancora sono riscontrabili nell'uso del formalismo algebrico; per un'analisi dettagliata rimandiamo all'articolo di Boero [92], già citato, e a Chiappini e Lemut [91].

Si riscontrano facilmente errori nel portare termini da un membro all'altro di un'uguaglianza, errori nell'estendere indebitamente proprietà (es.:la proprietà distributiva della divisione rispetto alla somma), errori nei processi di trasformazione e nell'uso scorretto di una stessa lettera per designare più variabili e infine la mancanza di collegamento tra significati da

rappresentare e forma algebrica di rappresentazione e la mancanza di consapevolezza delle regole sintattiche di trasformazione.

L'analisi di questi e di altri errori è, ovviamente, di rilevanza fondamentale per capire i processi cognitivi implicati nel pensare algebricamente e nel tradurre il pensiero in adeguato formalismo. Altrettanto fondamentale è la ricaduta di questi studi in termini di progettazione didattica.

Dopo l'opera di Viète, il cammino dell'algebra simbolica è caratterizzato da un'espansione continua, non immune da polemiche e opposizioni.

Nella prima metà del secolo XIX si sviluppa, all'interno della comunità dei matematici britannici, una vivace polemica sul significato dell'algebra e del suo simbolismo. Fino ad allora, l'algebra era stata considerata come "aritmetica universale", cioè una disciplina specializzata ad esprimere in modo generale le regole che governavano le operazioni aritmetiche : concezione questa che limitava fortemente le sue finalità e potenzialità. Nasceva il bisogno di liberare l'algebra da ogni limitazione. Sfard [92] parla di "vocazione mistica" per affermare che le leggi dell'algebra dovevano essere trattate in modo del tutto generale. In quel tempo il matematico inglese G. Peacock affermava un "principio di permanenza" secondo il quale ogni forma, che fosse algebricamente equivalente ad un'altra espressa in simboli generali, doveva continuare ad esserle equivalente, qualunque cosa denotassero i simboli. Il termine "forma" indicava probabilmente un'espressione algebrica e "algebricamente equivalente" significa equivalente per trasformazioni algebriche.

In questa nuova visione, anche la variabile non poteva continuare ad essere un numero generalizzato, ma era una cosa in sè, svuotata di ogni significato esterno. L'algebra veniva ad essere completamente sganciata dall'aritmetica. Secondo la teoria della reificazione, questo sarebbe un tipico esempio di "alienazione di un'idea matematica dalle sue origini operative per realizzare una piena reificazione " (Sfard, 1992).

Una volta liberata da ogni semantica esterna, l'algebra ha proseguito il suo cammino verso la creazione di oggetti matematici sempre più astratti, nel filone della cosiddetta matematica pura, che nasce a metà del secolo scorso. Sicuramente si è molto lontani dalla visione della matematica come ancella delle scienze naturali: ora appare solo regina delle proprie costruzioni.

A margine di queste considerazioni storiche, sono utili alcune riflessioni didattiche.

In uno studio sperimentale compiuto su studenti dai 15 ai 17 anni di differenti abilità, sono state indagate le credenze implicite sul significato delle formule simboliche e delle loro trasformazioni (Linchevski e Sfard [91]; Sfard e Linchevski [92]). E' emerso un chiaro orientamento a vedere la formula come stringa di simboli arbitrari, governati da regole altrettanto arbitrarie. Anche nei casi di risposte corrette, tali risposte erano dettate il più delle volte dall'abitudine, piuttosto che da una comprensione profonda dell'aspetto relazionale.

In effetti, questi studenti avevano trattato le formule algebriche con estrema rigidità, non come strumenti di pensiero su cui fare le trasformazioni sintattiche secondo gli scopi impliciti nel problema. Per loro le formule sono pure etichette, che significano solo se stesse, e su di esse operano con regole sintattiche che non incorporano alcuna base di conoscenza (Linchevski e Sfard chiamano pseudostrutturali questi studenti).

Questi risultati richiedono un commento. Nessuno osa negare che le idee espresse dalla scuola facente capo a Peacock fossero generate dalla necessità di liberare l'algebra dal peso dei referenti semantici esterni, inizialmente utili ma a lungo andare restrittivi. Tuttavia questi concetti, svuotati di ogni semantica, erano il punto finale di un processo di astrazione da parte di chi era passato prima attraverso i contesti semantici e vi poteva ritornare facilmente, in ogni momento. Si confronti a tale riguardo la distinzione tra atteggiamenti formali "sofisticati" ed atteggiamenti formali "ignari" in Prodi [77] pag. 145.

In accordo con Sfard [92], riteniamo che questo ritorno non sia altrettanto agevole per coloro ai cui occhi si è mostrato solo il punto finale: per essi il linguaggio algebrico è vuoto, privo di significato.

Sembra che una delle cause principali di difficoltà riscontrate anche all'inizio dell'università stia proprio nell'incapacità di dar senso ai simboli algebrici come simboli di un linguaggio, che non sia una pura sintassi (Burton, [88]).

Da queste riflessioni emerge abbastanza evidente un certo eclettismo nelle concezioni dell'algebra come disciplina e, parallelamente, una pluralità di concezioni della nozione di variabile.

A questo proposito è interessante la tesi sostenuta da Usiskin [88], secondo cui le finalità dell'insegnamento dell'algebra sono intrinsecamente correlate alle concezioni della disciplina e all'uso della variabile.

Se l'algebra è vista come aritmetica generalizzata, allora è naturale pensare alla variabile come generalizzatore. Per esempio 3+5=5+3 viene generalizzato con a+b=b+a.

Se l'algebra è vista come studio di procedure per risolvere certi tipi di problemi (per esempio per trovare il numero che moltiplicato per 5 e sommato a 3 dà 40), allora la variabile assume il significato di incognita.

Quando invece l'algebra è vista come studio di relazioni tra quantità, allora la variabile è considerata come "qualcosa che varia". Quando scriviamo A=bxh per l'area del rettangolo, stiamo descrivendo una relazione tra tre quantità e non compare nessuna incognita. Il senso di una formula del tipo A=bxh è profondamento diverso dal senso di una formula generalizzatrice del tipo 2n.

Se si intende l'algebra come studio di strutture, questo implica concepire la variabile come segno del tutto arbitrario.

Infine, non dimentichiamo il grosso problema della variabile in informatica. Osserva Usiskin che in informatica l'algebra usa un cast diverso da quello usato in matematica. Dal punto di vista informatico, il nome di una variabile può essere pensato come indirizzo di un certo specifico registro di memoria, e il valore della variabile come il contenuto del registro di memoria (si veda Chiappini [90]).

Non vogliamo qui entrare in dettaglio nel legame tra algebra e informatica, tema che meriterebbe un seminario a parte. Ci sembra tuttavia di non poter fare a meno di segnalare alcuni temi degni di interesse e riflessione.

E' stato osservato che l'avvento della tecnologia computerizzata ha segnato un cambiamento di paradigma nel senso di Kuhn [70].

Allora sorgono spontanee domande del tipo: quale il ruolo dell'algebra nel nuovo paradigma tecnologico? quale l'uso del formalismo algebrico? quale costruzione di conoscenze formalizzate a livelli diversi di astrazione?

Tutte queste considerazioni impongono un esame attento dei problemi connessi all'apprendimento dell'algebra come linguaggio; problemi che affondano le radici nei primi livelli di scolarità, nel rapporto dialettico tra linguaggio naturale e linguaggio simbolico, tra semantica e sintassi, tra procedure e relazioni.

"Un'armonia di dualità opposte" potrebbe sintetizzare il tentativo, a livello di didattica, di far riconoscere agli allievi i valori profondi e le potenzialità del linguaggio algebrico.

Non più sintassi vuota, dunque, e neanche linguaggio occultatore di arcani misteri, come ebbe a scrivere Bertrand Russell, ricordando il momento in cui gli capitò di accostarsi all'algebra:

"Quando si arriva all'algebra e si deve operare con x e y, c'è il desiderio naturale di saper cosa sono realmente x e y. Questo, almeno, era il mio sentimento: io ho sempre pensato che l'insegnante sapesse che cosa erano x e y, ma che lei non me l'avrebbe mai detto".

PARTE SECONDA

VERSO LA COSTRUZIONE DI UN MODELLO DELL'APPRENDIMENTO ALGEBRICO

2.0 Introduzione.

Nella prima parte, l'analisi delle ricerche più significative per l'apprendimento dell'algebra ha evidenziato che uno dei maggiori problemi didattici riguarda il rapporto che gli allievi riescono a creare tra le formule (nei processi di costruzione, interpretazione, manipolazione) e il significato che queste dovrebbero assumere nelle attività di risoluzione dei problemi algebrici. Si hanno così due casi estremi. Da un lato, gli studenti pseudostrutturali descritti nei lavori della Sfard e altri, che operano solo ad un livello formalistico vuoto; dall'altro, gli studenti incapaci di un vero pensiero algebrico, che ripiegano su surrogati più o meno efficienti (ad es., i metodi sincopati, descritti nei lavori della Laborde, in Harper e in vari lavori della Kieran, ecc.).

In entrambi i casi si crea un rapporto delicato tra algebra ed aritmetica, analizzabile in modo diverso: Chevallard lamenta che la didattica tradizionale metta in luce solo gli aspetti di continuità tra le due, inibendo i metodi algebrici nei loro aspetti profondamente nuovi rispetto a quelli aritmetici; la Sfard osserva che il nuovo corpo di conoscenze pseudo-strutturali che si viene a creare rimane completamente staccato dal vecchio corpo dell'aritmetica (non vi è integrazione dei processi primari e secondari). Sono comunque tutti d'accordo nell'osservare che in questi casi non si ha pensiero algebrico genuino (qualunque cosa ciò significhi).

La letteratura esistente in merito prova che è relativamente facile fare istantanee di questi drammatici aspetti dell'educazione matematica, ma che al contrario è estremamente difficile forgiare strumenti di analisi che suggeriscano anche interventi didattici concreti: per es., si veda il volume Wagner & Kieran [89] e la discussione nella prima parte di Bell, Malone & Taylor[87]. Ciò significa che gli strumenti usati per l'analisi dell'insegnamento e dell'apprendimento dell'algebra sono ancora inadeguati e finiscono con l'essere frustranti per chi cerchi in essi suggerimenti per migliorare la didattica.

In questa parte analizzeremo il pensiero algebrico nel suo concreto realizzarsi in classe da un punto di vista (parzialmente) nuovo, cioè dal punto di vista della semantica intensionale; tale metodo permette di mettere a fuoco alcune questioni didatticamente rilevanti per l'apprendimento dell'algebra in un modello teorico che sembra spiegare le principali difficoltà segnalate dalla letteratura. Esso inoltre suggerisce direttamente linee di intervento didattico che appaiono promettenti e che coinvolgono l'insegnamento dell'aritmetica fin dai primi anni della scuola elementare.

Rimandiamo la discussione sulla didattica dell'algebra alla terza parte; qui descriveremo il nostro modello teorico con un qualche dettaglio.

Il capitolo è suddiviso in cinque sezioni principali:

2.1 Si descrive l'ambiente in cui nasce e vive il pensiero algebrico e si individuano alcuni parametri fondamentali da tenere presenti nell'esame dei processi risolutivi dei problemi algebrici.

2.2 Si fa una prima analisi di alcuni tipici errori e misconcetti in algebra, particolarmente frequenti tra i principianti, e si delinea il problema dell'apprendimento dell'algebra come problema di interpretazione.

2.3 Si descrivono gli aspetti semantici e sintattici del pensiero algebrico e si schizzano i punti essenziali della semantica intensionale.

2.4 Si usa la semantica intensionale per analizzare alcuni protocolli di alunni e per interpretare i tipici misconcetti degli studenti descritti in 2.2

2.5 Si usa l'analisi effettuata per cercare di realizzare un provvisorio modello di didattica dell'algebra.

2.1 Le tre dimensioni e mezzo del pensiero algebrico.

I processi di pensiero algebrico prendono vita in un ambiente particolare che ne permette lo sviluppo e che sarà qui descritto come equilibrio tra opposte polarità. Ciascuna coppia di polarità individua una dimensione, che risulta un parametro essenziale per la descrizione del pensiero algebrico: si tratta comunque di condizioni necessarie ma non sufficienti, che devono essere ulteriormente precisate da un punto di vista procedurale e dinamico, compito che affronteremo nei paragrafi successivi. Per rendere più chiaro il discorso descriveremo ogni coppia di polarità come un asse cartesiano; ne risulterà un modello a tre dimensioni, con un'ulteriore graduazione in una scala dei "livelli di astrazione".

Asse x: linguaggio naturale - scrittura simbolica.

E' una dimensione le cui polarità giocano un ruolo essenziale in tutti i processi di messa in segno del sapere matematico, dall'aritmetica all'algebra (per scrittura simbolica si intende la scrittura del linguaggio simbolico della matematica, tralasciando di considerare gli aspetti simbolici del linguaggio naturale, che pure esistono e sono fondamentali nei processi di apprendimento della lingua). E' noto infatti che gli allievi delle elementari hanno un doppio registro nei processi di soluzione dei più semplici problemi aritmetici: vi è l'aritmetica orale coi suoi numeri parlati e in cui il flusso di ragionamento si appoggia sul linguaggio (naturale), sia come linguaggio interno sia come linguaggio esterno, e vi è l'aritmetica scritta, in cui i processi precedenti sono tradotti e il cui linguaggio simbolico possiede già alcune funzioni proprie del linguaggio algebrico (ad es., la funzione ideografica, di sintesi). Ora la traduzione tra i due linguaggi non è sempre uno-uno: ad es., nei problemi additivi e, anche se in minor misura, in quelli moltiplicativi, il linguaggio naturale è molto più ricco e sensibile alle diverse semantiche di quanto non lo sia quello scritto dell'aritmetica. La sintesi cui costringe la messa in formule aritmetiche obbliga spesso gli allievi a cambiare completamente la struttura dei processi propri dell'aritmetica orale (ciò è ampiamente dimostrato dai vari studi sulle gerarchie dei problemi additivi e moltiplicativi; per una discussione da questo punto di vista, si veda Arzarello [89]). Ciò costituisce un forte elemento di somiglianza e quindi continuità tra aritmetica e algebra, di cui occorre tenere conto fin dall'impostazione della didattica dell'aritmetica e dell'ingegneria didattica necessaria per affrontare le opposte polarità a livello di scuola elementare. Anche in algebra il processo di messa in formule di un problema è essenziale (e con caratteristiche tutte sue, come vedremo più avanti) e anche in algebra esso stravolge spesso il flusso di pensiero che accompagna i processi risolutivi orali (ad es. quelli dell'algebra sincopata, cfr. prima parte). Oltre che ad elementi di continuità, vi sono però, e sono essenziali, anche elementi di rottura: la messa in formule in algebra e il pensiero algebrico possono essere in forte dissonanza con i processi risolutivi orali: mentre un'aritmetica orale esiste ed ha senso, un'algebra orale è una contraddizione in termini, in quanto per sua natura l'algebra è scritta.

Asse y: sintassi - semantica.

Strettamente legata alla precedente dimensione è la polarità sintassi-semantica. Il linguaggio naturale, come è noto, permette un ottimo controllo semantico; i processi risolutivi orali (in cui, come già accennato, il linguaggio è coinvolto sia come linguaggio interiore sia come linguaggio esterno) garantiscono questo controllo in ogni momento del processo. Non così quando si passa al linguaggio simbolico, vuoi dell'aritmetica vuoi dell'algebra. Mentre nel primo caso la semantica prevale, per cui la sintassi del linguaggio ordinario gioca un ruolo irrilevante nel flusso di pensiero che governa i processi orali di soluzione, nel secondo caso gli aspetti sintattici del linguaggio simbolico usato (aritmetico, algebrico) diventano essenziali e prevalgono su quelli semantici. Il rapporto tra la sintassi del linguaggio algebrico e i significati coinvolti risulta un punto chiave per spiegare i tratti salienti del pensiero algebrico. Già dall'aritmetica questo è un punto essenziale: la comprensione della sintassi del linguaggio aritmetico è complessa in quanto si chiede di usarla in un linguaggio che incorpora forme di pensiero la cui struttura può essere diversa. In algebra le cose si complicheranno ancora, in quanto la sintassi deve diventare il sostegno attivo di nuove forme di pensiero, ma potrà farlo solo se essa riuscirà a incorporare nelle sue forme i tratti semantici essenziali.

In sostanza i due assi x e y esplicitano due aspetti di un unico fattore, che corrisponde, grosso modo, alle forme orali e a quelle scritte.

Asse z: relazionale - procedurale.

E' una polarità ampiamente discussa in letteratura (si vedano ad es., i lavori di Skemp [71], Sfard [91], Arzarello [91b], nonchè la discussione nella prima parte). Essa rischia addirittura di diventare fuorviante per la ricerca; la contrapposizione ha senso in quanto permette di cogliere un aspetto tipico del pensiero algebrico, cioè il passaggio brusco dai calcoli, dai tentativi numerici ecc. alla sintesi di tutto ciò in una formula. In generale, va osservato che si tratta di un rapporto delicato che pone problemi didattici complessi. Da un lato, gli aspetti procedurali possono essere di ostacolo per quelli relazionali: ad es., la comprensione del concetto di variabile come contatore e come accumulatore sembra a volte inibire gli aspetti relazionali delle variabili come predicati (cfr. Chiappini [91], Arzarello et al. [93]). Dall'altro, una frequentazione opportuna con gli aspetti tipicamente procedurali sembra necessario (ma non sufficiente) per garantire il salto nel relazionale, cfr. Arzarello [92].

Come accennato, la questione didattica va posta in altro modo: la nostra analisi proverà che sono gli aspetti di negoziazione didattica e il ruolo che si fa giocare in questo senso ai processi e ai prodotti degli allievi a determinare (o meno) un fruttuoso rapporto tra le due polarità per la costruzione del sapere algebrico. Un discorso analogo vale anche per le precedenti polarità.

Esiste infine una scala di livelli di astrazione diversa a cui situare i vari processi.

Il pensiero algebrico è caratterizzato da un controllo equilibrato di tutte le tre dimensioni x, y, z, ad un livello opportuno di astrazione. Altrimenti non si ha vero pensiero algebrico, ma solo surrogati più o meno efficienti. Si noti che le tre dimensioni dipingono solo lo sfondo in cui si svolgono i processi di pensiero algebrico e non pretendono di caratterizzarlo in alcun modo. I paragrafi successivi sono appunto dedicati ad un'analisi di tali processi in modo da riuscire ad animare lo sfondo con i giusti personaggi.

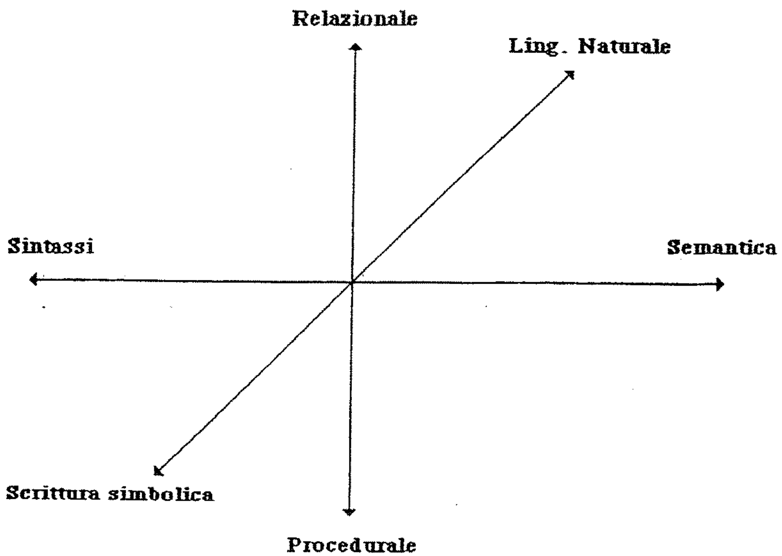


Fig. 4

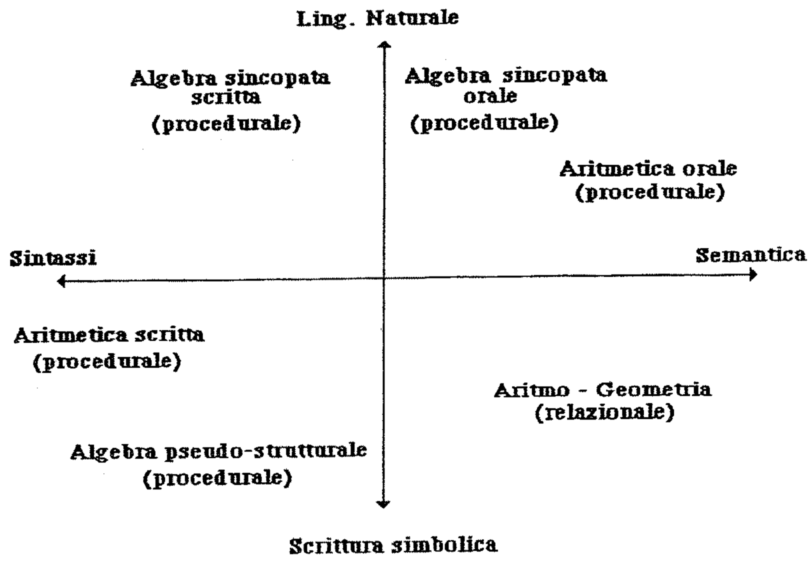


Fig.5

2.2 <u>Problemi di interpretazione</u>.

L'analisi dei misconcetti più frequenti negli studenti che apprendono l'algebra prova che gli allievi con difficoltà non controllano e non integrano in forma equilibrata le polarità descritte al paragrafo precedente e inoltre operano ad un livello basso di astrazione. Per es., gli studenti pseudostrutturali si dimostrano "incapaci di immaginare le entità intangibili (funzioni, valori di verità) che è loro richiesto di manipolare, ...e tendono a usare disegni e simboli come sostituti: una formula algebrica, la variabile, le lettere Δ ed R, ognuno di questi segni diventa una cosa in se stessa, che non sta al posto di alcunchè" (Sfard [92], p.2), e quindi tagliano via la polarità semantica. Gli studenti "sincopati" descritti da Harper tendono a eliminare la polarità relazionale, ecc.. Le espressioni simboliche prodotte-usate-interpretate da questi studenti risultano assai raramente strumenti di pensiero, cioè oggetti su cui si appoggia il pensiero e che lo stimolano addirittura, tendono invece a essere usate come oggetti depositari del sapere, cioè oggetti cui si delega in un certo senso il ragionamento, senza però un controllo consapevole sui significati in essi incorporati, anzi incorporandovi di solito aspetti superficiali e puramente formalistici.

Vi sono tre ragioni almeno, secondo le quali gli studenti non utilizzano le espressioni simboliche come strumenti di pensiero.

a) La prima è la più ovvia. Si ha quando gli studenti non sono in grado di usare il simbolismo algebrico per risolvere problemi, ma ripiegano su strategie risolutive che vivono solo nelle polarità semantiche e procedurali con il controllo del linguaggio naturale. Per es., i principianti che devono risolvere semplici problemi espressi a parole dapprima risolvono il problema (parzialmente o totalmente) con l'aritmetica orale e poi tentano di tradurre le loro strategie e processi in equazioni (cfr. la discussione in Kieran [89b], pag.35 ss.). Altri esempi sono riportati in Laborde [82]: studenti di 12-14 anni che devono risolvere problemi come: "*pensa un numero, sottrai 10 dal numero pensato...poi somma....poi moltiplica per......Ora pensa ad un altro numero e ripeti le stesse operazioni. Ottieni lo stesso risultato? Perche?*" non usano le formule algebriche, che pure conoscono, per rispondere ma surrogano l'algebra con l'algebra sincopata o addirittura retorica, ancorando il discorso alle azioni del soggetto nel tempo. Nel caso di problemi non troppo difficili, essi sono in grado di ottenere una soluzione con l'aritmetica orale (o con l'algebra retorica o sincopata) ma i loro strumenti di pensiero non sono le espressioni simboliche dell'algebra, le quali o non vengono usate o vengono usate come puri segni in cui si traducono i processi risolutivi elaborati in altro modo.

L'inibizione degli strumenti algebrici come strumenti di pensiero, ad es. per la risoluzione dei problemi, è stata ampiamente descritta nella letteratura. Molte ricerche hanno evidenziato gli ostacoli epistemologici, didattici e cognitivi che bloccano un apprendimento non puramente meccanico dell'algebra. Il dito è stato spesso puntato sul rapporto tra aritmetica e algebra evidenziando che, come a volte capita tra genitori e figli, si tratta di un rapporto che rischia di essere soffocante oppure di portare a una rottura insanabile. Per es., molti allievi rivelano una rottura tra la conoscenza operativa che hanno a livello aritmetico (dove hanno costruito i processi primari, cfr. Sfard [91, 92]) e il livello più alto della conoscenza di tipo algebrico (processi secondari), di cui essi dispongono solo come meccanismo formale. Per loro l'interpretazione di un problema nel linguaggio dell'algebra

è un compito arduo come è arduo per l' insegnante motivare questa necessità (vedi Chevallard [89]): oppure, da un altro lato, il problema è facile e perciò risolubile per altra via e quindi i metodi algebrici sono gratuiti.

b) Il secondo aspetto riguarda il significato profondo del simbolismo algebrico dopo Viète, cioè l'interpretazione di lettere e parametri nel senso pieno del loro significato, come ricordato nella prima parte. La seguente citazione di Lagrange è molto significativa a questo proposito:

"*Ce qui la distingue [l'algébre] essentiellement de l'arithmétique et de la géométrie consiste en ce que son objet n'est pas de trouver les valeurs mêmes des quantités cherchées, mais le systéme d'opérations à faire sur les quantités données pour en déduire les quantités qu'on cherche, d'aprés les conditions du probléme. Le tableau de ces opérations est ce qu'on nomme en algébre une formule; et lorsqu'une quantité dépend d'autres quantités, de maniére qu'elle peut être exprimée par une formule qui contient ces quantités, on dit alors qu'elle est une fonction de ces mêmes quantités; de sort qu'on peut définir <u>l'algébre, l'art de determiner les inconnues par des fonctions de quantités connues, ou qu'on regarde comme connues</u>*" (cfr. Chevallard [89], p. 158;le sottolineature sono nostre).

Il punto qui è che tale senso pieno può essere narcotizzato dal tipo di problemi di cui si richiede ad es. la messa in equazioni. Per es., per problemi del tipo $ax+b=0$ (a, b numeri specifici), può essere sufficiente una traduzione fedele delle computazioni aritmetiche svolte a mente (con eventuali modifiche non sostanziali): si veda Filloy & Rojano [89], che hanno confrontato questo caso con quello $ax+b=cx+d$, dove questa traduzione fedele non è più possibile. Ulteriori esempi si trovano in Chevallard [89], che dimostra come situazioni didattiche in cui si richieda agli studenti di usare le lettere come parametri sono molto rare a scuola (sia alle medie che alle superiori). Questi esempi fanno intuire come l'algebra scolastica tenda a cortocircuitare l'uso pieno dell'algebra nel senso detto da Lagrange. Le conseguenze possono essere gravi: ne può infatti risultare un'inibizione di quelle forme di pensiero anticipatorio sulle formule, che l'uso delle lettere nelle varie accezioni (incognite, variabili, parametri) può indurre e che è essenziale per lo sviluppo del pensiero algebrico.

c) Il terzo aspetto riguarda la messa in formule di una situazione. E' un processo delicato e complesso, che copre un ampio spettro di attività, a partire dalla scelta delle variabili fino alla scrittura vera e propria di una formula. E' da osservare che qui la differenza tra esperto e principiante è particolarmente accentuata: l'esperto infatti è in grado di scegliere le lettere in modo opportuno e particolarmente perspicuo per il tipo di problema da risolvere. Questo si coglie fin dalle prime scritture che mette in atto usando tali formule: anche se saranno eventualmente cambiate, esse incorporano già parte delle relazioni importanti del problema e prefigurano quindi parte delle trasformazioni che saranno successivamente compiute per giungere alla soluzione del problema. Tale processo, che chiamiamo di nominalizzazione e su cui ritorneremo, è quindi cruciale per l'intero processo di soluzione algebrica: esso tipicamente coinvolge aspetti anticipatori del pensiero. Al contrario dell'esperto, il principiante procede in modo più casuale nella scelta delle variabili e il suo processo di nominalizzazione risulta molto più fragile e superficiale, meno legato ad aspetti anticipatori, ma preferibilmente appoggiato a stereotipi rigidi di vario genere (mentre l'esperto si appoggia in modo flessibile a casi analoghi: si veda più avanti la discussione sui designatori rigidi).

I casi a), b), c) mostrano che uno dei principali problemi nell'apprendimento dell'algebra è dato da questioni di interpretazione. Ciò è ovvio nel caso a), dove l'algebra si presenta agli studenti come un linguaggio straniero più o meno noto in cui tradurre il problema e il processo di risoluzione, dopo che il problema è stato risolto in un linguaggio più familiare; ed è anche immediato nel caso c), in quanto il processo di nominalizzazione consiste nell'interpretare il testo del problema in modo da evidenziare il (o i) protagonista(i) della storia, elaborandola già mentalmente in modo da riferirla ad esso (è un tipico processo di collaborazione testuale, vedi Eco [79], che è presente anche in matematica, ad es. quando si legge un testo di problema).

Per quanto riguarda b), la citazione di Lagrange, interpretata con linguaggio moderno, ricorda che fare algebra significa essenzialmente studiare $\forall\exists$-formule, cioè formule come: $\forall a \forall b \forall c\ \exists x \exists y\ [ax + by = c]$ e non solo come: $\exists x\ [3x + 5= 0]$ (cioè come equazione numerica) oppure come: "$\forall a\ [2a = a + a]$ (cioè come identità). In effetti mentre le formule con un solo tipo di quantificatori sono più semplici (anche se tutt'altro che banali), l'interpretazione delle $\forall\exists$-formule è difficile per la maggior parte degli

studenti (un punto interessante per le speculazioni dei logici). Ma le cose sono messe ancora peggio di quanto si può immaginare: come osserva J.P.Drouhard in [92], e come alcune esperienze didattiche hanno provato (vedi gli ultimi lavori della Sfard), l'usuale semantica della teoria logica dei modelli usata dai matematici professionisti (e che è dovuta a Tarski) è inutile per spiegare le difficoltà incontrate dagli studenti che imparano l'algebra (anche nel caso delle formule con un solo quantificatore). Essa ha senso solo per quelli che hanno già superato le difficoltà cui siamo interessati: infatti interpreta le asserzioni matematiche con il linguaggio della teoria degli insiemi, che a sua volta usa, sia a livello informale che formale, i quantificatori e le lettere allo stesso modo delle asserzioni matematiche che interpreta. La sottigliezza della semantica tarskiana (cioè capire che "la neve è bianca" perché la neve è bianca) è un punto di arrivo (a un livello logico, ancora più astratto del livello, già difficoltoso, cui si pone l'algebra) e non uno strumento per esplicitare le difficoltà che si incontrano nell'apprendimento dell'algebra.

Nel paragrafo seguente svilupperemo una semantica, che ci sembra più adatta per i nostri scopi.

2.3 Semantiche intensionali, sceneggiature e funzioni trasformative del linguaggio algebrico.

In questa sezione affronteremo i due seguenti aspetti del problema:

(i) un'analisi teorica precisa del significato delle espressioni simboliche in algebra; tale analisi è fortemente finalizzata alla descrizione dei processi di apprendimento/insegnamento dell'algebra e quindi dovrà dare

(ii) una descrizione convincente dei processi di costruzione del sapere algebrico, dei misconcetti e degli errori tipici manifestati dagli allievi (un elenco dei quali è stato discusso nella prima parte).

In questo quadro seguendo Laborde [82] intenderemo per espressione simbolica:

i) termini: sono costanti e/o variabili o loro combinazioni per mezzo dei simboli di operazioni che sono utilizzati per designare gli elementi extralinguistici (matematici e non matematici) che sono coinvolti nell'attività matematica (5, 3+2, a, a+b, ...)

ii) le proposizioni o le funzioni proposizionali costruite mediante l'uso dei termini e dei predicati ($5+3=8$ è una proposizione; $x-2>0$ è una funzione proposizionale).

Il punto di partenza delle semantiche intensionali è l'analisi fatta dai logici delle semantiche per le logiche modali (si vedano i lavori fondamentali di Kripke [63a,b,c]), ma per la nostra discussione faremo uso anche di alcuni concetti presi dalla semiotica e dalla linguistica e anche dalla filosofia: per questo faremo riferimento alle opere di Eco [75, 79, 84], Frege [1892a,b, 77], Jakobson e Halle [56], Dummett [73] e Cauty [84].

Come osservato da Drouhard, le idee di Frege sulla semantica sembrano adatte per analizzare il modo in cui le espressioni simboliche vengono utilizzate in algebra, alla luce degli obiettivi didattici discussi all'inizio del paragrafo.

In particolare, sarà utile distinguere tra senso (Sinn) e denotazione (Bedeutung) di un'espressione (Zeichen): la denotazione di un'espressione è l'oggetto (Gegenstand) cui l'espressione si riferisce, mentre il Sinn è il modo con cui l'oggetto ci è dato (tutti conoscono l'esempio di Frege sui due diversi sensi dell'espressione /Venere/, vale a dire come /Espero/, cioè la stella della sera e come /Fosforo/, vale a dire come stella del mattino: le due espressioni hanno sensi diversi ma denotano lo stesso oggetto.

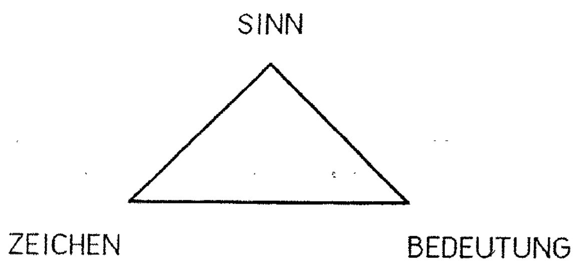


Fig.6: Triangolo di Frege

2.3.1 <u>Senso e denotazione in algebra</u>

Anche in matematica abbiamo espressioni i cui sensi sono diversi ma che hanno la stessa denotazione. Per es., le espressioni $4x + 2$ e $2(2x + 1)$ esprimono una regola diversa (senso) ma denotano la stessa funzione, cioè lo

stesso insieme di coppie ordinate; analogamente le due equazioni (da risovere in **R**) $(x+5)^2 = x$ e $x^2+x+1 = 0$ denotano lo stesso oggetto (l'insieme vuoto) ma hanno un senso diverso. Sia il linguaggio matematico che quello naturale sono ricchi di espressioni che hanno sensi diversi e uguale denotazione. La denotazione riguarda gli aspetti estensionali di un'espressione, mentre il senso riguarda i suoi aspetti intensionali: le due coppie di espressioni hanno a due a due la stessa estensione (risp. la funzione f: $x \dashrightarrow 4x+2$ come insieme di coppie ordinate e l'insieme vuoto), ma hanno intensioni diverse (vale a dire le due diverse regole di calcolo per la funzione f e i due modi diversi di descrivere l'insieme vuoto, a dire "non c'è alcun numero reale uguale al quadrato del suo valore aumentato di cinque" e "non c'è alcuna soluzione reale per un'equazione di secondo grado con discriminante negativo").

La <u>denotazione</u> di un'espressione simbolica in algebra, è l'insieme numerico, eventualmente vuoto, rappresentato dall'espressione. Tale insieme risulta determinato oltre che dall'espressione simbolica anche dall'universo numerico in cui l'espressione viene considerata. Ad esempio le due equazioni di secondo grado di cui sopra, che abbiamo visto denotare l'insieme vuoto in R, se considerate in C denotano rispettivamente gli insiemi $\{1/2(-9+i\sqrt{19}), 1/2(-9-i\sqrt{19})\}$ $\{1/2(-1+i\sqrt{3}), 1/2(-1-i\sqrt{3})\}$.

Osserviamo inoltre che le espressioni incorporano in modo sintetico, nella propria forma segnica, un senso, che chiameremo <u>senso algebrico</u>, che é l'esplicitazione del modo in cui il denotato può essere ottenuto attraverso l'applicazione di regole computazionali. Ad esempio data l'espressione $/n(n+1)/$ nell'ambito dei numeri naturali esprime una regola di calcolo, che esplicita operativamente il modo in cui può essere ottenuto l'insieme denotato $\{0, 2, 6, 12, 20, \ldots\}$. Le trasformazioni algebriche possono produrre espressioni diverse che hanno un senso algebrico diverso. Per esempio la trasformazione di $/n(n+1)/$ in $/n^2+n/$ non cambia ovviamente la denotazione ma solo il senso algebrico, cioè la regola di calcolo per ottenere l'insieme denotato. Si osserva che non sempre se due espressioni diverse hanno la stessa denotazione sono riducibili l'una all'altra con trasformazioni algebriche (cfr. l'uso che Sfard [92] ha fatto di questa proprietà nei suoi test sulle espressioni "non trasformabili" con uguale denotazione e con senso diverso). Inoltre, come è noto, certe trasformazioni algebriche possono essere effettuate solo sotto certe condizioni che possono comportare dei vincoli all'universo numerico in cui l'espressione trasformata deve essere considerata.

Un'espressione simbolica può essere impiegata in domini di conoscenza diversi per risolvere problemi, matematizzare situazioni, descrivere fenomeni ecc. Tali domini possono essere di tipo matematico (aritmetico, geometrico, analitico....) o extramatematico (fisico, biologico, economico...). In tali domini l'espressione, oltre la denotazione e il senso algebrico che le sono propri, può assumere sensi diversi che dipendono dalla natura del dominio in cui viene impiegata. Ad esempio la formula /n(n+1)/ in un contesto di geometria elementare piana, può rappresentare un modo di esprimere l'area di un rettangolo di lati /n/ e /n+1/, nell'ambito di una teoria elementare dei numeri essa ha il senso di 'prodotto di due numeri consecutivi'.

All'interno dei vari domini di conoscenza i simboli algebrici possono essere utilizzati per dare nomi agli elementi extralinguistici (matematici e non matematici) che entrano in gioco nella soluzione di un problema, al fine di costruire una espressione simbolica che attraverso opportune manipolazioni sintattiche e/o interpretazioni possa dare l'evidenza della soluzione.

Questo processo di nominalizzazione porta alla costruzione di espressioni che, oltre al senso algebrico precedentemente descritto, assumono altri sensi che sono dipendenti dagli aspetti culturali, socialmente condivisi, del dominio di conoscenza in cui l'espressione viene impiegata. Chiameremo senso contestualizzato il senso che un'espressione assume all'interno di un certo dominio di conoscenza.

Per esempio l'espressione $E = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots\ldots + x_n^2$ nel dominio della teoria dell'informazione può essere utilizzata per esprimere l'energia totale di un segnale, note le ampiezze $x_1, x_2, \ldots, x_n$ di campioni successivi e opportunamente scelti di un segnale a banda limitata. Se la stessa espressione viene considerata nel dominio geometrico, in uno spazio ad n dimensioni x_1, $x_2, \ldots, x_n$ possono essere utilizzate per indicare le coordinate di un punto in tale spazio e l'espressione E rappresenta il quadrato della distanza del punto dall'origine. A tale riguardo è interessante notare che lo stabilire una connessione tra questi due sensi ha permesso a Shannon di dimostrare un teorema fondamentale della teoria dell'informazione (cfr. Pierce [63])

Inoltre, data una espressione simbolica all'interno di un certo dominio di conoscenza, notiamo che le trasformazioni algebriche possono permettere di

mettere in evidenza altri sensi sotto cui guardare le relazioni tra gli elementi della situazione .

Un esempio suggerito da Guidoni e illustrato da Boero [92b] può essere illuminante al riguardo.

La seguente espressione simbolica:

(1) $$T_f = (m_1 T_1 + m_2T_2) / (m_1 + m_2)$$

se interpretata all'interno del dominio di conoscenza della termodinamica permette di mettere in evidenza il modo di calcolare la temperatura di equilibrio T_f di due masse d'acqua , m_1 e m_2 , di temperatura rispettivamente T_1 eT_2 .

Osserviamo che una semplice trasformazione algebrica permette di ottenere la seguente espressione simbolica:

(2) $$T_f (m_1 + m_2) = m_1 T_1 + m_2T_2$$

a cui può essere attribuito il senso di conservazione della quantità di calore.

Alcune semplici trasformazioni conducono alla seguente espressione:

(3) $$(T_f - T_1) / (T_2 - T_f) = m_2 /m_1$$

che mette in evidenza l'esistenza di una proporzionalità inversa tra le due masse d'acqua e le variazioni assolute di temperatura.

Notiamo che l'attualizzazione dei tre sensi connessi alle trasformazioni algebriche compiute è resa possibile dal riconoscimento di specifiche proprietà nella forma delle espressioni simboliche. In questo quadro il senso contestualizzato di un'espressione simbolica è il risultato di una corrispondenza che si viene a stabilire tra gli aspetti culturali del dominio di conoscenza in cui l'espressione viene impiegata e la forma segnica dell'espressione in cui risultano inglobati i(l) suo(i) senso(i) algebrico(i) e la sua denotazione. A volte attraverso tale corrispondenza si potranno mettere in evidenza le relazioni quantitative che si stabiliscono tra elementi della situazione, altre volte si potrà mettere in evidenza il modo attraverso il quale si può ottenere una certa grandezza, note le altre, altre volte ancora si potrà esplicitare un (nuovo) concetto o una (nuova) idea all'interno del dominio di conoscenza in oggetto.

Osserviamo inoltre che anche il senso contestualizzato di una espressione, oltre al senso algebrico, può comportare dei vincoli all'universo numerico in cui l'espressione viene considerata. Mentre i vincoli di tipo algebrico dipendono dall'esplicitazione delle condizioni di calcolo sotto le quali una espressione è valida, quelli posti dal contesto dipendono dalle conoscenze all'interno del dominio e dagli scopi soggiacenti alla soluzione. Nell'esempio precedente, a seconda che si scelga la scala Celsius o la scala Kelvin, dovranno essere posti vincoli diversi all'universo numerico in cui risulta determinato l'insieme delle quintuple rappresentato dall'espressione (2). Ovviamento la scelta dipende dagli scopi del risolutore. Nell'espressione (3) invece il senso algebrico conduce anche a porre vincoli di tipo algebrico.

Osserviamo infine che il senso algebrico e il senso contestualizzato di un'espressione simbolica hanno una dimensione sociale in quanto possono essere condivisi dai membri di una comunità e coincidono con il modo in cui tali membri interpretano tale espressione nel dominio e nelle circostanze di enunciazione in cui essa viene impiegata. Da ciò consegue che sia il senso algebrico che quello contestualizzato hanno un carattere oggettivo in quanto risultano inglobati nel codice e nella cultura socialmente condivisi da una comunità.

Non c'é quindi una corrispondenza uno a uno tra senso e denotazione. Come evidenziato da molte ricerche (vedi Drouhard [92], Kieran [89]), gli aspetti intensionali sono molto importanti in quanto può essere difficile per gli studenti afferrare l'invarianza della denotazione rispetto ai cambiamenti di senso: c'è una sorta di rigidità che li fa operare come se ci fosse una corrispondenza uno-uno tra senso e denotazione, che di fatto li porta alla loro identificazione. Questi studenti rimangono con una denotazione banale, cioè un'espressione simbolica che denota se stessa: la loro algebra è puramente sintattica e per loro i processi secondari, dei quali parla la Sfard (cfr. prima parte), sono pure regole sintattiche e niente di più. Il loro significato vero, cioè il triangolo di Frege (Fig. 6) è collassato nel segmento segno-senso. Questo ostacolo alla semantica dell'algebra affonda le sue radici nella semantica dell'aritmetica, molto più semplice, che rende difficoltoso interpretare le espressioni algebriche nel modo giusto: in aritmetica l'invarianza della denotazione è pressochè automatica, in quanto essa si verifica rispetto ad espressioni numeriche la cui denotazione è un numero ben preciso, che può essere concretamente calcolato ogni volta (in algebra, non solo ci si scontra con l'ostacolo del termine in sospeso, discusso nella prima parte, ma occorre anche cogliere l'invarianza della denotazione di tali termini sospesi in quanto funzioni, impresa davvero ardua!).

Però, anche la semantica alla Frege risulta insoddisfacente per spiegare la dinamica di processi che risultano coinvolti nell'uso del linguaggio simbolico dell'algebra. Senso e Denotazione sono gli ingredienti giusti cui guardare, ma essi sono utili solo per darci alcune istantanee delle difficoltà algebriche, non per ricostruire l'intero film.

Per questo, abbiamo trovato molto utili alcuni concetti propri della linguistica tradizionale (si chiamava retorica) ed altri della semiotica e della logica modale.

Il modello illustrato sopra descrive le difficoltà algebriche come deficienze nel modo in cui gli allievi padroneggiano l'invarianza della denotazione rispetto al senso. Per es., gli studenti pseudostrutturali analizzati dalla Sfard non si rendono conto, nel caso delle equazioni, "che il concetto di insieme verità -cioè l'insieme dei numeri che non devono cambiare rispetto alle operazioni ammesse- ... è proprio il concetto che dovrebbe chiarire come mai alcune manipolazioni sono permesse" (Sfard [92], p. 2) e altre no; siccome essi non afferrano l'invarianza, diventano "formalisti", nella terminologia della Sfard, cioè rivelano una "fondamentale incapacità di collegare le leggi dell'algebra con quelle dell'aritmetica" e quindi "le manipolazioni formali ... [rimangono] come unica sorgente di significato" (ibid., p.8).

2.3.2 Studio di un caso

Cercheremo di illustrare l'importanza ai fini dell'apprendimento delle relazioni che si stabiliscono tra senso e denotazione attraverso il caso di una studentessa del terzo anno di matematica (Anna) alle prese con una attività di problem solving algebrico.

Per rendere chiara la nostra analisi ci riferiamo ad un protocollo, ma le nostre definizioni ed osservazioni hanno un carattere generale. Il protocollo è scelto perchè è un caso emblematico che assomma quasi tutti gli aspetti, secondo i quali si scompongono i processi di pensiero in algebra, in accordo alla nostra analisi.

Il protocollo di Anna è tipico di uno studente 'medio' (quindi anche di un futuro insegnante medio!)(1) .

PROBLEMA.

Dimostrare che il numero $(p-1)(q^2-1)/8$ è pari, se p e q sono primi dispari.

EPISODIO 1. Anna sviluppa la formula scrivendo le parole *pari dispari* sul foglio vicino alle formule:

$$(p-1)(q^2-1)/8 = (p-1)(q+1)(q-1)/8$$

Anna indica via via le varie parti della formula e dice:
«pari, pari, pari...hmm...il numero che rimane non è pari...» .

EPISODIO 2. Anna sviluppa la formula proprio sotto le parole pari, dispari:

$$(p-1)(q^2-1)/8 = (pq^2-q^2-p+1)/8$$

fa qualche calcolo orale del tipo*«dispari per dispari fa dispari»*, poi dice: *«....hmm...non funziona!»*.

EPISODIO 3. Come il precedente, ma con i calcoli del tipo *«dispari per dispari fa dispari»* riferiti ai fattori (p-1), (q^2-1); poi Anna dice: *«Ci deve essere qualche formula per i numeri primi che bisogna usare!»*.

(1) Come osservazione in margine, per chi insegna matematica: ammesso che tali prove abbiano un minimo di significato, è evidente che, al di fuori delle occasioni ufficiali di esame, in cui gli studenti danno prove ufficiali più o meno brillanti del loro sapere matematico, e del cui livello i professori hanno un'idea, in condizioni di normalità, vale a dire senza preparazione specifica, questo è il modo in cui ragiona uno studente medio di matematica. Come diceva Klein cent'anni fa, si ha l'impressione che essi mettano tra parentesi quasi tutto quello che hanno appreso (?!) all'Università e riprendano i vecchi schemi di ragionamento delle medie, come pure le vecchie rigidità, misconcezioni, errori. In questo senso, le prestazioni date su semplici problemi che non coinvolgono specifiche conoscenze acquisite all'Università, non sono molto lontane da quelle degli studenti della scuola media, inferiore e superiore

EPISODIO 4. Anna cancella con lunghi segni le formule dei precedenti episodi e inizia col verificare la formula con alcuni primi: raccoglie i dati in una tabella:

p	q
3	5
5	7
3	7

$$\frac{(3-1)(25-1)}{8} = \frac{2 * \overset{3}{\cancel{24}}}{\cancel{8}}$$

$$\frac{(5-1)(49-1)}{8} = \frac{4 * \overset{6}{\cancel{48}}}{\cancel{8}}$$

$$\frac{(3-1)(49-1)}{8} \quad \frac{2 * \overset{6}{\cancel{48}}}{\cancel{8}}$$

Anna commenta: *«Perciò è già q due meno uno che è multiplo di otto!»*.
[tra gli episodi 4 e 5 non c'è soluzione di continuità nel tempo]

EPISODIO 5. Anna cambia foglio di carta e scrive la seguente formula:

$$\frac{\underbrace{(p-1)}_{\text{multiple of 2}}\quad\underbrace{(q^2-1)}_{\text{multiple of 8}}}{8}$$

Poi Anna scrive la formula:

$$(2h+1-1)[(2k+1)^2-1]/8 = 2h(4k^2+4k+1-1)/8 = 2h\ 4k(k+1)/8$$

[la linea di frazione è solo sotto 4k(k+1) e il numero 8 è sotto di essa]
e dice:*«....se k è pari , quattro k è multiplo di 8* [Anna indica il numero 8 della formula] , *così rimane un multiplo di 2* [Anna indica il numero 2 della formula], *e siamo a posto. Se k è dispari.......*
[Anna semplifica 8 con 4 nel solito modo, scrivendo 2 vicino a 8; poi semplifica il 2 col 2 che è coefficiente di h nella formula]
Se k è dispari, non va....NO! se k è dispari, k più uno [Anna indica il k+1 della formula *è pari e siamo a posto!»*

EPISODIO 6. Anna guarda di nuovo il testo del problema e dice:
«Ma i primi non c'entrano niente! Bastano i dispari!».

Se leggiamo attentamente il protocollo di Anna, possiamo osservare che il momento risolutivo consiste nell'improvviso cambiamento di strategia dall'episodio 4 all'episodio 5. Ciò è contrassegnato dal cambiamento di frame dove la studentessa sviluppa la propria attività interpretativa [2].

Infatti, Anna inizia il processo risolutivo attivando il frame "numeri pari e dispari" con un copione preciso (episodi 1, 2, 3), quindi passa al frame più vago "numeri primi" seguendo copioni più incerti (episodi 3, 4) e infine arriva al frame "multipli" usando un copione preciso (episodi 4, 5). La prima fase è caratterizzata da trasformazioni sintattiche stereotipe guidate dal frame "numeri pari e dispari". Come risulta chiaro dall'involuzione di questa fase, il controllo semantico è molto debole.Il frame "pari-dispari" è usato solo per testare la formula passo passo, ma essa continua ad essere manipolata secondo stereotipi standard e quindi non è utilizzata come uno strumento di pensiero. L'idea che si debba usare qualche formula magica culmina con la fine dell'episodio 3, che segna un cambiamento di frame (numeri primi) e un profondo cambiamento di metodo: ora il ragionamento diviene aritmetico. Qui la semantica è forte, il frame assume forti connotazioni aritmetiche, è abitato da espressioni numeriche che diventano strumento di pensiero e a lungo andare attivano forme di ragionamento ipotetico che permette nuove interpretazioni in un un nuovo preciso frame (multipli), parzialmente sovrapposto al primo. Ora (episodio 5) Anna può leggere la vecchia formula con un occhio nuovo: essa viene scritta in modo da incorporare il vecchio frame "pari-dispari" e inoltre è manipolata in conformità a un pensiero anticipatorio legato al nuovo frame. Non è più il modo in cui la formula è scritta a suggerire manipolazioni standard per vedere "quel che capita", ma la formula viene scritta e trasformata con il preciso obiettivo di provare una congettura. In altre parole,

(2) Il termine frame è preso dagli studiosi di AI (cfr. Minsky [75]); un frame è una struttura di dati in grado di rappresentare una situazione stereotipa, ad es. andare al supermercato o a una festa di compleanno. Ogni frame implica un certo numero di informazioni. Alcune riguardano ciò che ci si aspetta debba succedere; altre invece riguardano il da farsi, nel caso che tali attese non si realizzino. Un frame è una sorta di storia condensata, che ha i suoi copioni (scripts) e in cui ci si aspetta che il soggetto faccia qualcosa. I frames sono attivati quali testi virtuali mentre si interpreta un testo, per esempio di un problema, in conformità al contesto e alle circostanze (collaborazione testuale)

nel nuovo frame, la relazione Sinn-Beduetung della formula appare come uno strumento di pensiero, ovvero la sua duplice natura è usata dialetticamente per testare un'ipotesi: gli aspetti intensionali sono guidati e costruiti da quelli estensionali, e viceversa (episodio 5, prima parte). Questo è un primo aspetto di quello che chiamiamo formule come strumenti di pensiero, ovvero quando le manipolazioni sono fatte in profonda connessione con gli aspetti denotativi.

Ma vi è un secondo modo in cui le formule possono essere usate come strumenti di pensiero.

La seconda parte dell'episodio mostra una certa rigidità degli aspetti sintattici: la formula incorpora il fatto che /4k(k+1)/ è un multiplo di 8 in modo trasparente solo quando k è pari. Anna incontra qualche difficoltà nel caso che k sia dispari; gli aspetti di forma la forzano a semplificare in una certa maniera e per un po' Anna non accorda la denotazione congetturata per la formula /k(k+1)/ (cioé l'insieme dei pari) con un suo senso algebrico corretto. Per realizzare tale accordo non è necessario manipolare la formula ma basta attivare una nuova interpretazione e cogliere che /k+1/ permette di ottenere un pari se k denota l'insieme dei numeri dispari. E' lo slittamento del senso algebrico di /k+1/, a seconda della denotazione di k, a rendere possibile ciò. Rispetto al primo modo con cui abbiamo visto le formule come strumenti di pensiero (trasformazioni dell' espressione formale per esplicitarne la denotazione), ora l'espressione formale non cambia; è il senso a cambiare, in quanto occorre guardare la sua denotazione in un nuovo modo, slittando dal frame *multipli* a quello *pari-dispari*.

Si possono fissare le precedenti osservazioni nelle proposizioni seguenti che riguardano i modi di pensare con una formula:

(i) il primo modo è di trasformare la formula per ottenere un'espressione che presenti un senso adeguato per il compito da risolvere, avendo chiaro o mettendo eventualmente a fuoco la corretta estensione da associare alla formula;

(ii) il secondo è di scoprire una nuova intensione, senza fare trasformazioni formali ma interpretando l'espressione in un nuovo frame, avendo chiaro o mettendo eventualmente a fuoco la corretta estensione da associare alla formula .

In entrambi i casi i cambiamenti sono resi attivi in quanto sia l'intensione che l'estensione di una formula sono immersi in uno o più frames.

Il secondo aspetto è più evidente nelle soluzioni date da un altro studente dell'indirizzo didattico al seguente problema:

"Verifica se tra tutti i rettangoli di data area ce n'è uno, il cui perimetro è minimo. Giustifica le tue affermazioni".

Un tipico studente 'medio', Roberto, ha risolto il problema come segue: dapprima ha scritto la formula S=bh; poi ha controllato 'che cosa capita' con alcuni casi numerici; dopodiche, ha scritto la formula S=xy, ha espresso il semiperimetro come x+S/x ed ha poi usato gli strumenti standard del calcolo per trovare il minimo. Osseviamo che gli studenti di livello alto in genere scrivono indifferentemente una formula come S=bh oppure S=xy, ma passano subito ad usare le derivate in modo standard. Quelli di livello basso si perdono in calcoli numerici per esempi specifici; al più provano l'asserto per valori precisi di S. E' chiaro che la riscrittura della formula fatta da Roberto segna un cambiamento di frame, cioè dal frame <u>formula per l'area</u> al frame <u>formula per le funzioni</u>. Il senso cambia in quanto Roberto cambia il dominio di conoscenza in cui l'espressione viene impiegata.

Un ulteriore commento sembra importante a questo punto. Quando non prevalgono aspetti puramente sintattici (come negli studenti pseudoformalisti) nè puramente sincopati, gli studenti 'medi' (e anche quelli di livello alto) nei loro ragionamenti algebrici usano un doppio registro, che corrisponde alla polarità Linguaggio Naturale-Scrittura Simbolica (asse x di fig.1). L'integrazione non è sempre perfetta e talvolta è una delle due polarità a prevalere; per es., i primi tre episodi del protocollo di Anna mostrano che il frame *pari-dispari* non è stato incorporato nella scrittura simbolica: è solo nella terza fase che Anna giunge a un migliore bilanciamento delle due polarità, dopo che ha cambiato frame. In ogni caso, nell'ultima fase (frame *multipli*), l'essere multiplo di 8 viene incorporato con difficoltà e solo parzialmente nel linguaggio simbolico. Invece gli studenti 'alti' sembrano usare la polarità Linguaggio Naturale solo come sottofondo, in quanto saltano gran parte dei frames usati dagli studenti 'bassi' e 'medi' e vanno direttamente all'ultimo. Però nelle interviste fatte loro subito dopo avere risolto il problema, essi esplicitano spontaneamente gran parte dei frames saltati con dovizia di dettagli; ciò sembra confermare che anche nel loro caso sembrano esserci più frames, ma essi non vengono esplicitamente sviluppati (si ricordi la definizione di frame come testo virtuale).

La presenza di frames nei processi di soluzione può dare evidenza al fatto che gli studenti usano una semantica piena (vale a dire con senso e denotazione) e generalmente è evidenziata da spie linguistiche: per es., Anna scrive esplicitamente e sottolinea nelle sue spiegazioni i tre successivi frames, dove sviluppa i suoi ragionamenti algebrici; Roberto rinomina le variabili, quando passa da un frame all'altro.

2.3.3. <u>Nominalizzazione, connotazione e designatori rigidi</u>

Abbiamo visto come i processi di costruzione-interpretazione delle lettere (variabili-parametri) siano cruciali in algebra. In particolare notiamo che nel processo di nominalizzazione intervengono sia aspetti di *predicazione* (cioè attribuire ad un oggetto una o più proprietà atte a classificarlo e a distinguerlo da altri oggetti) che quelli *ideografici*, propri del linguaggio algebrico.

La scelta dei nomi per indicare gli oggetti in gioco si lega strettamente al controllo delle variabili che vengono introdotte per caratterizzare le proprietà che si vogliono magnificare di tali oggetti in relazione al contesto di enunciazione del problema. Questo richiede la capacità di disambiguare, alla luce del codice algebrico, le relazioni tra gli oggetti in gioco nella soluzione del problema. La difficoltà didattica sta nel fatto che il pensiero non può operare con il codice algebrico appoggiandosi sulla semantica del linguaggio naturale per esplicitare le proprietà che si vogliono magnificare. Quindi l'allievo, pur in grado di esprimere con il linguaggio naturale le relazioni tra gli elementi in gioco nella risoluzione del problema (come fa nell'algebra sincopata) può non essere in grado di esprimere tali relazioni attraverso un uso appropriato del codice algebrico.

Questo ruolo tipico dell'algebra, che estende ampiamente i metodi aritmetici, è stato bene colto già da Viète, che ha messo in luce il problema della predicazione come punto chiave per potere applicare i metodi analitici della *logistica speciosa* (cioè sostanzialmente quelli propri delle equazioni algebriche, radicalmente nuovi rispetto a quelli tipici dell'aritmetica, in cui si trattano come note le grandezze incognite, per giungere alla soluzione): *"Logistica numerosa est quae per numeros , Speciosa quae per species seu rerum formas exhibetur, ut pote per Alphabetica elementa"* (cfr. Freguglia [91], p. 208 ; [88]; [89]).

Il processo di nominalizzazione dei concetti non solo ha un notevole rilievo storico-epistemologico per l'algebra, ma si presenta importante anche per le teorie dell'apprendimento: esso è stato discusso da alcuni studiosi sovietici, per quanto ne sappiamo, in contesti tipicamente linguistici (ad es. nell'activity theory) ma è fondamentale anche per l'apprendimento dei linguaggi simbolici della matematica. Purtroppo, non siamo a conoscenza di studi su questo problema per quanto riguarda il pensiero algebrico, eccetto i lavori di Chevallard.

L'analisi che abbiamo effettuato ci porta a ritenere che il processo di nominalizzazione si carichi di aspetti connotativi quando il soggetto, in relazione allo scopo del problema, ritenga più proficuo evidenziare per mezzo di nominalizzazioni appropriate specifiche relazioni piuttosto che altre, in quanto a suo giudizio più adeguate alle circostanze di enunciazione e risoluzione del problema.

In questo quadro la connotazione risulta essere una importante componente degli aspetti intensionali di una espressione simbolica. Essa appare strettamente connessa con gli aspetti anticipatori ed euristici che legano il processo di nominalizzazione allo scopo del problema.

La connotazione interviene nella scelta della nominalizzazione più appropriata quale punto di partenza di un flusso di pensiero orientato verso un obiettivo. Una buona capacità connotativa caratterizza i buoni risolutori algebrici, coloro che riescono ad intravedere sin dall'inizio un possibile percorso, incorporandolo implicitamente nelle prime attività di nominalizzazione.

D'altra parte il processo di nominalizzazione può risultare impoverito e spesso bloccato quando il soggetto costruisce e interpreta i termini in modo rigido cioé senza capire la relazione che si stabilisce tra senso e denotazione all'interno del nome. Di conseguenza non vengono colte le possibilità del codice algebrico di incorporare proprietà diverse all'interno dei nomi. Il nome diventa un designatore rigido, fonte di ostacolo per il ragionamento algebrico, in quanto inibitore della flessibilità necessaria al sostegno delle due funzioni, algoritmica e simbolica, durante il processo risolutivo.

2.3.4 Funzione simbolica e algoritmica del linguaggio algebrico.

Da quanto abbiamo detto nei precedenti paragrafi risulta che per interpretare opportunamente i processi algebrici degli studenti e per esplicitare che cosa significa pensare algebricamente, è necessario integrare la semantica di Frege in un contesto più dinamico, dove si dia conto dei seguenti aspetti del pensiero algebrico:

(i) l'uso dei frames;

(ii) le relazioni dinamiche tra sensi e denotazione, rese attive nei vari domini di conoscenza dall'attivazione di frames ;

(iii) il passaggio da un frame ad un altro e da un dominio di conoscenza ad un altro.

Per fare ciò, abbiamo trovato utili alcune nozioni della retorica; l'analisi del linguaggio matematico con gli strumenti della retorica classica è stata fatta in Cauty [84]: noi adatteremo i suoi risultati alla semantica secondo Frege.

Abbiamo visto che il punto chiave della semantica di Frege è il triangolo di Fig.6. La retorica classica studia, tra l'altro, le relazioni tra significato (senza distinguere tra denotazione e senso) e l'espressione simbolica che sta per essi (significante).

In particolare, la retorica classica ha classificato le espressioni a seconda del fatto che la stessa espressione possa essere usata con più di un significato (si ha allora il tropos, Fig.7) oppure che più espressioni possano essere usate con lo stesso significato (si ha la figura, Fig.8).

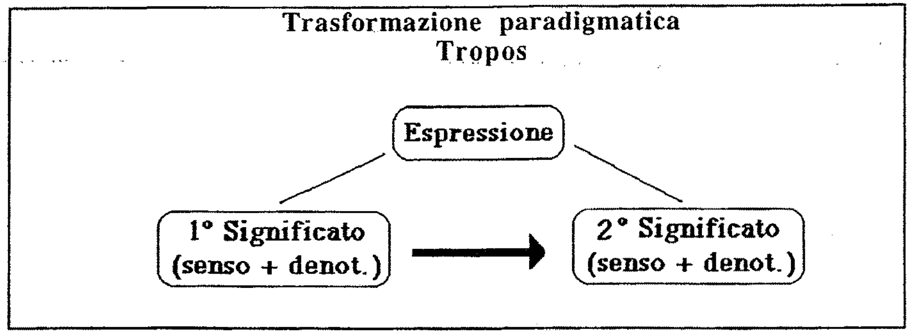


Fig. 7

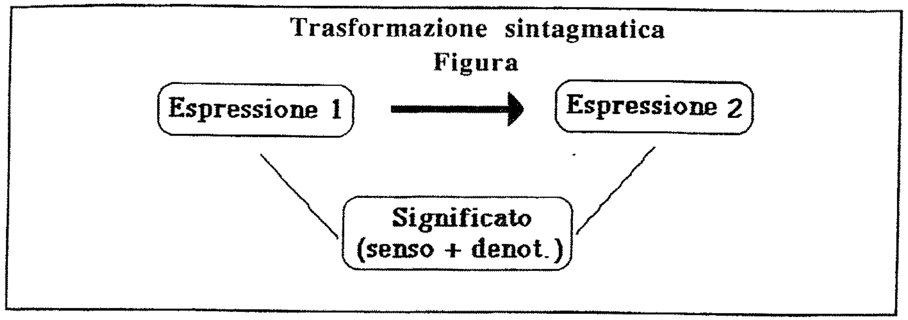


Fig. 8

Tipici tropos sono: l'<u>omonimia</u> (/cane/ può significare sia l'animale che una parte del fucile, che una costellazione: lo stesso significante per oggetti completamente diverse); la <u>polisemia</u> (/penna/ è come l'omonimia, solo che i due oggetti hanno almeno storicamente una qualche sovrapposizione); la <u>metafora</u> (/il collo della bottiglia/: il senso di /collo/ in contesti usuali, come quando è riferito a persone, contiene una parte che indica 'parte stretta in alto'; tale parte è usata per risolvere la proporzione logica "collo : persona = x : bottiglia"). Le differenze tra tropos dipendono dalle mutue relazioni tra i diversi significati corrispondenti all'unico significante; ci può essere nessuna relazione tra i due (omonimia), parziale sovrapposizione (polisemia), inclusione (metafora).

I tropos governano la cosiddetta <u>funzione simbolica della scrittura.</u> La funzione simbolica esprime tipicamente una creatività semantica; richiede di selezionare in un contesto tra diverse alternative; è governata dalle analogie e dalle somiglianze (si pensi per esempio al termine collo: il frame cambia dai quadri di Modigliani alla bottega di camicie).

In algebra la funzione simbolica è attiva quando si cambia il frame o addirittura il dominio di conoscenza all'interno dei quali si rendono attivi i processi interpretativi, in breve, quando l'espressione non cambia ma il suo senso muta. Nell'esempio di Anna, all'episodio 5 la funzione simbolica è attiva quando la studentessa che interpreta in un modo nuovo la formula (passando dal frame "pari-dispari" al frame "multipli"); analogamente Roberto quando rinomina le variabili (passando dal dominio "area" a quello "funzioni").

La figura 9 mette in evidenza come nel nostro modello la nozione di funzione simbolica può risultare integrata all'interno della semantica di Frege in cui il concetto di significato viene scomposto nelle due componenti senso e denotazione. All'interno di un dominio di conoscenza il triangolo di Frege E, S1, D mette in evidenza la relazione che si realizza tra espressione E, senso S1 e denotazione D all'interno di un frame che il soggetto attiva. Un cambiamento di frame provoca il passaggio al nuovo triangolo di Frege E, S2, D. In questo passaggio risulta attivata la funzione simbolica del linguaggio algebrico che permette di mettere a fuoco il nuovo senso S2 da associare alla espressione E in base al nuovo frame attivato.

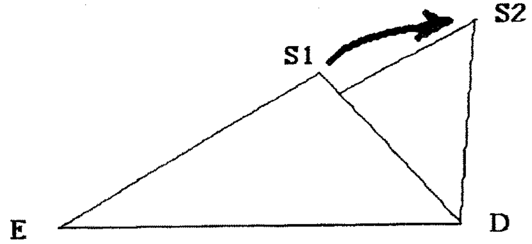


Fig.9

Le 'figure' invece riguardano i casi in cui due diverse espressioni hanno lo stesso significato. Analogamente ai tropos, si possono avere casi diversi; si hanno così: i) il <u>polimorfismo</u> (le due espressioni hanno lo stesso senso e la stessa denotazione : es. logx o lnx); ii) la <u>parafrasi</u> o l'<u>affinità di significato</u> (le due espressioni hanno stessa denotazione ma senso diverso: es 4*3 e 10+2); la <u>metonimia</u> (le due espressioni presentano una inclusione: es. "la funzione 2x" e "la funzione y=2x").

Dal nostro punto di vista, la figura più interessante è l'affinità di significato; essa infatti governa la funzione algoritmica della scrittura. E' questa funzione a permettere lo sviluppo dei calcoli in aritmetica e in algebra. Ed è proprio questa funzione che gli studenti pseudostrutturali possiedono solo parzialmente: le loro trasformazioni infatti perdono l'affinità di significato, in quanto non possiedono una semantica piena. La funzione algoritmica esprime tipicamente una efficienza sintattica.

La figura 10 permette di mettere in evidenza come la nozione di funzione algoritmica risulta integrata all'interno della semantica di Frege. All'interno di un dominio di conoscenza per mezzo del triangolo di Frege E1, S1, D viene messo in evidenza la relazione che si realizza tra espressione E, senso S1 e denotazione D all'interno del frame che il soggetto attiva. Attraverso la trasformazione nella quale risulta coinvolta la funzione algoritmica del linguaggio algebrico l'espressione E1 viene trasformata nell'espressione E2. A tale espressione il soggetto può associare un nuovo senso S2 (3).

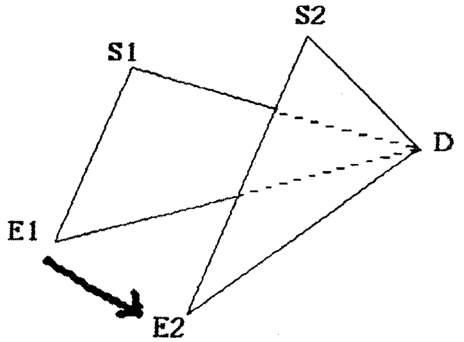


Fig. 10

(3) Per comprendere le due funzioni del linguaggio, simbolica e algoritmica, può essere utile il seguente passo di Jakobson:
"Any linguistic sign involves two modes of arrangement.
1) Combination. Any sign is made up of constituent signs and/or occurs only in combination with other signs. This means that any linguistic unit at one and at the same time serves as context for simpler units and/or finds its own context in a more complex linguistic unit.....
2) Selection. A selection between alternatives implies the possibility of substituting one for the other, equivalent to the former in one respect and different from it in another. Actually, selection and substitution are two faces of the same operation....
These two operations provide each linguistic sign with two sets of interpretants...there are two references which serve to interpret the sign --one to the code, and the other to the context, whether coded or free; and in each of these ways the sign is related to another set of linguistic signs through an alternation in the former case and through an alignment in the latter. ....
...The development of a discourse may take place along two different semantic lines: one topic may lead to another either through their similarity either through their contiguity. The metaphoric way would be the most appropriate term for the first case and the metonymic way for the second, since they find their most condensed expression in metaphor and metonymy respectively...In normal behaviour both processes are continually operative" (Jakobson [56], pp.60-62).

2.4 Il modello al lavoro.

Ora disponiamo di ingredienti sufficienti per descrivere i processi di soluzione dei problemi algebrici. Da un lato la semantica alla Frege pone il seguente problema: fare algebra consiste nel costruire sensi per denotazioni e denotazioni per sensi. Dall'altro, tropos e figure permettono di descrivere passo passo il processo algebrico come cambiamento di sensi.

Tipicamente in tali processi lo studente interpreta via via testi in testi (i testi sono generalmente scritti ma anche gli aspetti parlati e le rappresentazioni non verbali giocano un ruolo importante): la sua cooperazione testuale è determinante per attivare uno o più frames. Si genera così una catena di interpretanti in cui ogni testo è l'interpretante del testo precedente e sarà interpretato al passo successivo. Ciascun passo della catena è governato da un tropos (di solito una polisemia), che può corrispondere a un cambio di frame oppure da una figura (di solito un'affinità di significato), che invece implica una trasformazione sull'espressione simbolica. La denotazione in ogni caso non cambia a meno che non si decida di cambiare l'insieme numerico in cui si opera (per esempio, passare da R a C per risolvere una equazione).

Con questo modello in mente è possibile riprendere il protocollo di Anna e descrivere i vari episodi e i relativi cambiamenti individuando tropos e figure via via usati. L'esercizio è lasciato al lettore.

Per mettere maggiormente in evidenza come il modello illustrato sia in grado di descrivere i principali processi coinvolti nel problem solving algebrico e come la dinamica delle strategie di risoluzione dipenda in larga misura anche dal processo di nominalizzazione e, al suo interno, dagli aspetti connotativi che lo accompagnano, illustriamo brevemente alcuni risultati emersi nella soluzione di due problemi sottoposti a studenti del secondo biennio di matematica. Si é trattato di una prova realizzata senza alcun fine valutativo, in modo assolutamente anonimo, nella quale agli studenti era stato richiesto di accompagnare la soluzione dei problemi con l'esplicitazione scritta del processo di pensiero e delle difficoltà incontrate. Un'analisi più estesa dell'intera sperimentazione compiuta realizzata su 6 problemi con un campione di circa 70 studenti del secondo biennio di matematica sarà presto pubblicata.

PROBLEMA A.

Mostra che se ad un numero di quattro cifre si somma il numero ottenuto invertendo l'ordine delle cifre (es. 1235 +5321) si ottiene un multiplo di 11.
Come puoi generalizzare il risultato?

Le strategie risolutive degli studenti sono state classificate nel modo seguente:

Nominalizzazione:

1. Mette in evidenza il valore posizionale delle cifre attraverso la rappresentazione polinomiale
2. Non mette in evidenza il valore posizionale delle cifre (il numero viene rappresentato come /abcd/).
3. Altre

Frames attivati:

1. Multipli di 11
2. Criterio di divisibilità per 11
3. Divisibilità di polinomi
4. Controlli aritmetici.

Esempi di strategie :

TIPO A1.1

2567 + 7652 = 10219 = 11 * .... *Provo con controlli numerici.*

1 = n 2 = n+1 3 = n+2 5 = n+4 *Provo a nominalizzare*

n(n+1)(n+2)(n+4) + (n+4)(n+2)(n+1)n
$(n^2+n)(n^2+8n+8)$............
[Svolge i calcoli, ma..] *Non concludo nulla. E' tutto sbagliato*

abcd + dcba = (a+d) (b+c) (c+b) (d+a)

Devo dire che é un interessante esercizio; è un peccato che non riesca a partire.

a+d = Migliaia
a+c = Centinaia
c+b = Decine
d+a = Unità
abcd + dcba = (a+d) 1000 +(b+c) 100 + (c+b) 10 + (d+a) 1
(a+d)(1000+1) + (b+c)(100+10) =
(a+d)1001 +(b+c)110

---> ho trovato che (a+d) é multiplo di 1001, che è un multiplo di 11 e anche 110.
---> Penso di aver trovato la soluzione.

TIPO A1.2

1235 = 5321 = 6556 *Ho fatto l'esempio dato e un altro per vedere se è veramente un multiplo di 11.*

4723 + 3274 = 7997

[Lo studente controlla se i risultati sono multipli di 11 eseguendo divisioni]
Ora provo a trovare un esempio generale che vale per tutti i casi.

$m = a_1\, a_2\, a_3\, a_4$
$n = a_4 a_3\, a_2\, a_1$

$m = a_1\, 10^3 + a_2\, 10^2 + a_3\, 10 + a_4$
$n = a_4 10^3 + a_3 10^2 + a_2 10 + a_1$ *Ho trovato il caso generale scrivendo il numero come potenza di 10, cioè*

$m+n = (a_1 + a_4)\, 10^3 + (a_3 + a_2)\, 10^2 + (a_2 + a_3)\, 10 + (a_4 + a_1) =$
nella rappresentazione decimale e usando l'algebra sono arrivato a controllare il risultato.
................[Poi lo studente controlla che 11 divide m+n]

Le strategie A1.1 e A1.2 sono state realizzate utilizzando una nominalizzazione che mette in evidenza la rappresentazione polinomiale del numero all'interno del frame 'multipli di 11'.

Osserviamo che la strategia A1.1 è tipica dei risolutori medi che fanno diverse esplorazioni numeriche e ricorrono attraverso tentativi anche a nominalizzazioni diverse prima di giungere a quella che permette di arrivare alla soluzione. La strategia A1.2 è invece tipica di buoni risolutori che evidenziano un migliore pensiero anticipatorio. Si noti il ruolo diverso giocato dagli aspetti connotativi nel dirigere e orientare il pensiero.

TIPO A2.1

Io penso a un generico numero di 4 cifre: $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$
Io posso scriverlo in questo modo: $a_1\, 10^3 + a_2\, 10^2 + a_3\, 10 + a_4$

Il numero fatto con le stesse cifre invertite è: $a_4 a_3\, a_2\, a_1$
cioè $a_4 10^3 + a_3 10^2 + a_2 10 + a_1$
La loro somma è $(a_1 + a_4)\, 10^3 + (a_3 + a_2)\, 10^2 + (a_2 + a_3)\, 10 + (a_4 + a_1)$
Un numero é divisibile per 11 quando sommando le cifre di posto dispari e quelle di posto pari si ottiente 0, 11 o un multiplo di 11.
In questo caso la somma delle cifre di posto pari è $a_3 + a_2 + a_1 + a_4$
La somma dei dispari è $a_1 + a_4 + a_3 + a_2$
La loro differenza è allora 0

TIPO A2.2

Lo studente controlla la proprietà con 1235 e con 5769	*Provo a vedere se c'è qualche simmetria*
	Provo con numeri >5

Ho simmetria solo se la somma delle cifre in ogni numero è <10

a b c d
d c b a
....
(a+d) (b+c) (c+b) (a+d) se (a+b) e (b+c) <10

(a+d) + (c+b) = (b+c) + (a+d)

Se io ho 4 cifre nel risultato la somma della prima e della terza cifra eguaglia quella della seconda e della quarta cifra.

Le strategie A2.1 e A2.2 sono tipiche di studenti che non mettono in evidenza il valore decimale delle cifre e sviluppano il processo risolutivo nel frame "criterio di divisibilità per 11".

In particolare A2.1 illustra un tipico caso in cui la rappresentazione polinomiale è scritta ma non usata. Infatti nella pratica viene usata una rappresentazione puramente posizionale senza considerare le potenze di 10. Il senso delle variabili introdotte è ristretto a nominalizzare le cifre del numero; ciò inibisce la flessibilità di pensiero necessaria per prendere in considerazione possibili riporti. Questo sembra dipendere anche dal fatto che il processo risolutivo si sviluppa nel frame 'criterio di divisibilità' che enfatizza questo tipo di rigidità.

Nell'esempio A2.2 lo studente dimostra una flessibilità sufficiente a prendere in considerazione possibili riporti, ma la cattiva nominalizzazione (che non esplicita le potenze di 10) e l'anticipazione di qualche possibile simmetria (suggerita quasi sicuramente dal frame 'criterio di divisibilità') inibiscono la possibilità di giungere ad una soluzione.

TIPO A3

$a = A \cdot 10^3 + B \cdot 10^2 + C \cdot 10 + D$
$b = D \cdot 10^3 + C \cdot 10^2 + B \cdot 10 + A$

Provo a scrivere i numeri in questa forma, altrimenti se li scrivessi nella forma a=ABCD, b=DCBA non potrei sommarli!

$a+b = (A+D)\,10^3 + (B+C)\,10^2 + (C+B)\,10 + (A+D)$

$(A+D)\,10^3 + (B+C)\,10^2 + (C+B)\,10 + (A+D)$ | $10+1$
.... | ----------------------------------
.... | $(A+D)100 + [(B+C)-(A+D)]10 + (A+D)$

E il resto è zero: quindi a+b è un multiplo di 11.

TIPO A4

Si tratta di un tipo di strategia risolutiva basata esclusivamente sull'esecuzione di verifiche e controlli di tipo aritmetico . Rimane aperto il problema se questi studenti non abbiano cercato di produrre una soluzione algebrica perchè incapaci di realizzarla o se, invece, abbiano ritenuto sufficiente ciò che essi realizzavano a livello aritmetico (L'ultima ipotesi sarebbe veramente preoccupante!!!)

La seguente tabella illustra le relazioni tra percentuale di successi e strategie messe in atto dagli studenti. Dalla tabella risulta evidente il ruolo giocato dalla connotazione per l'intero processo di soluzione

	TIPO DI STRATEGIA	SCELTA	SUCCESSO
Tipo A1	Polinomiale; Multiplo di 11	33%	96%
Tipo A2	Posizionale; Criterio di divisibilità per 11	32%	0%
Tipo A3	Polinomiale; divisibilità di polinomi	8%	83%
Tipo A4	Controlli aritmetici	18%	0%

PROBLEMA B.

Dati tre numeri positivi a, b, c, provare che

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \qquad \text{sse} \qquad a = b = c$$

Come puoi generalizzare il risultato?

Nella soluzione di questo problema risulta particolarmente coinvolta la funzione algoritmica del linguaggio algebrico. Nell'analisi a priori erano stati messi in evidenza possibili blocchi derivanti dall'uso del quadrato del trinomio, dall'applicazione del principio di identità dei polinomi, e dall'annullamento del prodotto.

I risultati hanno confermato le ipotesi effettuate e hanno stupito per l'alto numero di studenti che sono incorsi in tali blocchi.

I protocolli degli alunni possono essere classificati entro 6 tipologie di cui vengono evidenziati le caratteristiche principali: B1 tentativi disperati; B2 identità di polinomi; B3 annullamento del prodotto; B4 rinominalizzazione; B5 dimostrazione per assurdo; B6 soluzione anticipata.

Corrispondentemente si individuano i seguenti frames:

- tipologie B1-B6 ----> frame 'buona forma'
- tipologia B2 -----> frame 'identita` di polinomi'
- tipologie B3-B4 -----> frame 'annullamento del prodotto'
- tipologia B5 -----> frame 'dimostrazione per assurdo'

TIPO B1

Mi ricordo di prodotti del tipo:

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac)$

[C'é una breve deviazione di tipo B2 (vedi sotto)]

$(a+b)^2 - 2ab + c^2 = ac + ab + bc$

.... i calcoli danno:

$(a+b+c)^2 = 3(ac + bc + ab) =$

$= 3(a^2 + b^2 + c^2)$

.... da questo punto cominciano i calcoli che, in una maniera o nell'altra, conducono alla formula di partenza..........

I protocolli di tipo B1 mettono in evidenza uno scarso pensiero anticipatorio e pertanto le vie seguite spaziano tra la ricerca di buona forma e di relazioni. Nessuno conclude e i tentativi sono disperati. Tutti gli studenti che realizzano i

protocolli raggruppati sotto questa tipologia sono consapevoli di procedere per tentativi.

TIPO B2

$a^2 + b^2 + c^2 = ac + bc + ab$

La prima cosa che mi viene in mente é di scindere i quadrati e pensare all'identità: dato che per ipotesi , l'uguaglianza si mantiene certamente nella relazione allora

$aa + bb + cc = ac + ab + bc$

$aa = ac$ ---> $a=c$

$bb = ab$ ---> $b=a$ -----> $a=b=c$

$cc = bc$ ---> $c=b$

Ma non sono sicuro, perché c'è la somma
e quindi proverò ancora

I protocolli inclusi in questa tipologia sono caratterizzati da poche manipolazioni; in generale esse sono orientate alla ricerca di relazioni che portano ad applicare il principio di identità dei polinomi. Il protocollo scelto è caratteristico di questa tipologia: si nota inizialmente la scomposizione e, di seguito, l'applicazione del principio di identità dei polinomi. Si nota poi una certa titubanza, vengono fatte alcune prove che non portano a risultati interessanti e quindi si accetta implicitamente la dimostrazione precedentemente realizzata.

TIPO B3

$a(a-c) + b(b-a) + c(c-b) = 0$

Osservo che a,b,c sono positivi; perché questa somma sia zero i tre addendi devono essere zero

$a-c=0$

$b-a=0$

$c-b=0$

Come si può notare dall'esempio riportato, il risolutore di B3 prima scompone la relazione data e poi, con una certa sicurezza e motivando la sua scelta, applica il principio dell'annullamento del prodotto. Questa strategia è tipica di tutti i protocolli raccolti in questa tipologia. Tutti gli studenti sembrano molto convinti di ciò che fanno, non si pongono interrogativi. In generale arrivano a questa soluzione dopo manipolazioni varie. In tutti i protocolli c'è un uso esteso del linguaggio naturale per giustificare le proprie scelte strategiche.

TIPO B4

$a = n$	*E' un flash?*
$b = n + h$	
$c = n + k$	
..... i calcoli portano al risultato:	
$h^2 + k^2 - hk = 0$	
$(h - k)^2 + hk = 0$	
che é vera sse $h = k$ e $hk = 0$, cioè $h = k = 0$	
----> $a = b = c$	

La tipologia di soluzione B4 mette ben in evidenza il ruolo degli aspetti connotativi nello sviluppo del pensiero algebrico. In generale questo tipo di soluzioni è caratterizzato da manipolazioni guidate da un certo pensiero anticipatorio. Dopo una fase esplorativa si giunge ad una ri-nominalizzazione che permette di esplicitare una coreferenza tra le variabili a, b, c attraverso l'assegnazione di nuovi nomi ai tre numeri (n, n+h, n+k, intendendo implicitamente h e k positivi e possibilmente h<k).
Questo processo trasforma l'espressione di partenza. Nella nuova forma segnica vengono ora messe in evidenza proprietà che rendono più semplice allo studente raggiungere i suoi scopi, cioè arrivare ad una espressione costituita da una somma di termini positivi uguale a zero.

TIPO B5

Suppongo $a=b\neq c$	*Sto provando un altro modo, basato su una dimostrazione per assurdo*
Devo arrivare ad una contraddizione	
$a^2 + b^2 + c^2 = ac + ab + bc$	
$2a^2 + c^2 = ac + a^2 + ac$	*Sembra funzionare e posso ripetere con $a\neq b=c$,*
$a^2 - 2ac + c^2 = 0$	$a=c\neq b$ *(il risultato è analogo)*
$(a - c)^2 = 0$	
Contraddizione	
	Concludo: $a = b = c$

La soluzione di tipo B5 produce una falsa dimostrazione basata su un modo non corretto di negare una doppia uguaglianza. E' un tipico errore, presente anche in altri problemi, i cui ingredienti sono:

- scelta di realizzare una dimostrazione per assurdo
- non corretto uso delle leggi di De Morgan (ben conosciute dagli studenti)
- presenza di una singola formula con una doppia uguaglianza come a=b=c (quando richiesto, tutti gli studenti sono in grado di interpretare tale formula come /a=b & b=c/)

Osserviamo che gli studenti che hanno prodotto soluzioni del tipo B5 sono stati intervistati, senza che, all'inizio, fosse loro detto che la soluzione era sbagliata. Tutti erano convinti che la propria soluzione fosse corretta; la maggioranza di loro è rimasta convinta di ciò anche dopo che gli è stato comunicato che la soluzione doveva considerarsi sbagliata.

Volendo descrivere più in dettaglio gli errori che gli alunni hanno commesso possiamo dire che il loro ragionamento si sviluppa lungo due direzioni che prendono entrambe in considerazione i seguenti due casi: i) /a≠b/ e ii) /b≠c/.

1. (approccio più diffuso) Si prende in considerazione il caso i) *le relazioni tra b e c sono completamente libere, non determinate. Così si può supporre, senza perdere in generalità, che per esempio b=c* e si ragiona di conseguenza. Si procede in modo analogo per il caso ii).

2. (approccio meno diffuso) Si prende in considerazione il caso i); *esso è sufficiente a considerare quando b=c, perchè gli altri casi saranno considerati nella seconda parte del ragionamento*. Seconda parte del ragionamento: si suppone b≠c e si ragiona in modo analogo.

E' importante sottolineare che gli errori evidenziati sembrano emergere solamente quando gli studenti affrontano problemi algebrici concreti e non quando manipolano analoghe formule logiche in contesti generici.

TIPO B6

$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

$2(a^2 + b^2 + c^2) = 2(ab + bc + ca)$

$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2ab + 2bc + 2ca$

$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0$

$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$

....

Dai protocolli dei pochi studenti la cui soluzione può essere classificata in questa tipologia notiamo che non c'è ricerca di quadrati di trinomi, come invece succede in tutti coloro che sviluppano il processo risolutivo nel frame 'buona forma', bensì una immediata ricerca di quadrati di binomi. Proprio dalla ricerca di quadrati del tipo $/(a-b)^2/$ emerge la presenza di un forte pensiero anticipatorio.

La seguente tabella mette in evidenza la percentuale di alunni la cui soluzione può essere classificata nelle tipologie risolutive descritte.

Tipologia	% studenti coinvolti
Tipo B1	19,6%
Tipo B2	15,6%
Tipo B3	15,6%
Tipo B4	11,7%
Tipo B5	23,5%
Tipo B6	3,9%
Non classificati	9,8%

2.4.1 'Evaporazione' e 'condensazione' in algebra: una metafora della costruzione del sapere algebrico

Torniamo ora ai due tipi di prestazioni algebriche deboli, introdotti in precedenza, cioè le strategie pseudostrutturali e quelle sincopate. Si tratta di strategie presenti anche nelle tipologie di soluzione prima illustrate.

In sintesi si può dire che nelle strategie pseudostrutturali sono inibite le tipiche funzioni (simbolica e algoritmica) del pensiero algebrico. Ciò è dovuto al fatto che per lo studente pseudostrutturale, le trasformazioni non sono come nelle Figg. 7,8 ma come in Fig.11.

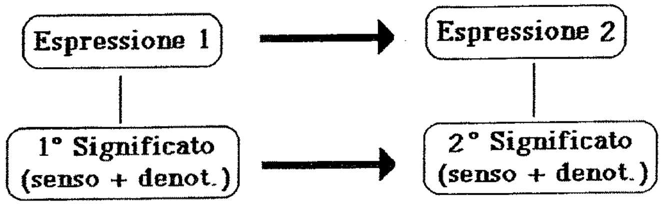


Fig.11

Tale anomalia può essere spiegata con la teoria dei designatori rigidi, introdotti in precedenza: gli studenti pseudostrutturali generalmente usano un tacito assioma (o falso teorema in atto), che può avere un suo fascino ingenuo, cioè ogni espressione è un designatore rigido. In un certo senso, nel loro mondo le sole espressioni ammesse sono del tipo "questo", "quello" (situazione divertente, che potrebbe avere suggerito storie interessanti a Lewis Carroll e a Rodari).

Per quanto riguarda l'algebra sincopata, sono essenzialmente la funzione simbolica del linguaggio algebrico nonchè i processi di nominalizzazione ad essere inibiti. Chi usa prevalentemente i metodi sincopati è come una persona che non è in grado di pensare in una lingua straniera ma prima pensa nel proprio linguaggio e poi traduce. Infatti, nell'algebra sincopata la funzione simbolica concerne solo una metà delle polarità che abbiamo discusso nel §2.1, cioè il linguaggio naturale, ma non quello algebrico (scrittura simbolica), la semantica e non la sintassi (della scrittura simbolica), gli aspetti procedurali (ancorati al tempo e alle azioni del soggetto) più di quelli relazionali. In altre parole, gli studenti sincopati sono in grado di passare da un frame all'altro (e conseguentemente da un significato all'altro) solo (o prevalentemente) utilizzando il linguaggio naturale; con questo essi infatti sono in grado di controllare semanticamente il flusso del loro ragionamento. Ma non sono in grado di rendere tale flusso nelle forme simboliche dell'algebra, costruendo il complesso rapporto tra segni e significati, proprio dell'algebra, discusso sopra. Il blocco più grosso riguarda i processi di nominalizzazione, cioè l'incapacità di incorporare i significati nei segni in modo da permettere quelle trasformazioni in cui la semantica è assente, ma che sono guidate da anticipazioni sul possibile stato finale dell'espressione (processo cruciale per la didattica dell'algebra, che sarà discusso nella terza parte). Ciò cortocircuita completamente, in quanto lo rende inaccessibile fin da subito, ogni forma di pensiero algebrico.

Questo pericolo era stato gia' messo in evidenza da Prodi [77] che, trattando l'introduzione dell'algebra nella scuola secondaria superiore, distingue tra segno (impronta grafica) e simbolo (segno che richiama un oggetto reale). Prodi osserva che un atteggiamento formale o sintattico (che consiste nel calcolare con puri segni senza domandarsi "che cosa vogliono dire") puo` essere assunto con due atteggiamenti antitetici: quello "sofisticato" di chi vuole spingere il discorso matematico alla completa purezza e quello "ignaro" di chi calcola "senza sapere quello che fa".

Come tipico prodotto delle carenze descritte sopra, molto spesso, nel passaggio alla scrittura simbolica si verifica il fenomeno che chiamiamo <u>evaporazione</u>. Per comprenderne il significato è utile confrontarlo con l'analogo (ma positivo) fenomeno della condensazione (i concetti sono stati introdotti da Arzarello nella Scuola estiva di Torino nel 1990, vedi Arzarello [91a]; il termine /condensazione/ è preso dalla semiologia (si veda Eco [84], p.157). Come esempio tipico, si ha <u>condensazione</u> quando il significato relativo a un oggetto nell'ambito di un certo frame è incorporato in una formula in modo efficiente, e quindi si ha una buona nominalizzazione. Si può dire che il significato (senso + denotazione) in carne ed ossa non è più lì, come succede quando si usa il linguaggio naturale, ma il significato non è nemmeno evaporato via: infatti si è condensato nella formula; gli aspetti ideografici tipici del linguaggio algebrico lo rendono trasparente e conferisono all'espressione simbolica quella flessibilità necessaria (ma non sufficiente) per produrre trasformazioni sintattiche interessanti. Completamente diversa l'evaporazione,

in cui invece si rimane con una formula nuda, che non condensa altro che se stessa, generalmente in forma povera, spesso come designatore rigido. Un altro tipico esempio di condensazione si ha nel processo di costruzione-comprensione di un tropos, cioè quando la stessa espressione simbolica è riferita a due significati diversi, eventualmente in due frames diversi; in tal caso, la condensazione sottolinea la creatività semantica, tipica di quando si ragiona per analogie, metafore, ecc. Ad es., si ha condensazione quando Roberto rinomina le variabili nel problema 2, cambiando frame (da area a funzione) con un'affinità di significato; altri esempi sono discussi in Arzarello [91a].

Mentre la condensazione implica un forte controllo semantico, l'evaporazione segna la drammatica perdita di significato incontrata da moltissimi allievi quando sono costretti a non usare più il metodo sincopato nella risoluzione dei problemi algebrici. Tipicamente, l'inibizione del metodo sincopato provoca la transizione alla semantica vuota degli studenti pseudostrutturalisti, come descritto in Fig. 11, e all'uso delle espressioni simboliche come designatori rigidi. Come detto prima, l'evaporazione blocca il processo di nominalizzazione e la conseguente possibilità di manipolazioni sulle formule: è pertanto un formidabile ostacolo allo sviluppo del pensiero algebrico in quanto inibisce due delle sue principali funzioni.

I due fenomeni evaporazione-condensazione sono in qualche modo duali; hanno infatti caratteristiche simili, se si giudicano i processi degli allievi dall'esterno: solo in profondità appare la loro drammatica differenza. Sono ad es. entrambi fenomeni che si verificano bruscamente e come tali difficili da analizzare. In questo punto delicato, appare fondamentale il ruolo del linguaggio: ad es. la dialettica tra linguaggio interiore e linguaggio esterno (quale può per esempio essere sollecitata dall'uso di mediatori nella risoluzione dei problemi come il foglio elettronico, o più modestamente la raccolta di dati numerici in tabelle) sembra favorire quei processi di pensiero che by-passano l'evaporazione e causano invece condensazioni. E` un ulteriore conferma della necessita` di descrivere questi processi guardando al flusso di pensiero che li accompagna.

2.5 Verso un modello di didattica dell'algebra.

Il nostro obiettivo di ricerca non è puramente di tipo descrittivo, ma didattico: la nostra analisi va giudicata in quanto può permettere una descrizione mirata ad un concreto intervento didattico sull'apprendimento dell'algebra. A tal fine è necessario cercare di valutare le ricadute che il modello descritto può avere sul terreno della didattica. E' necessario precisare che l'analisi che al riguardo abbiamo compiuto è ancora di tipo generale e necessita di conferme sperimentali più approfondite (tale analisi sarà sviluppata nella terza parte).

Sicuramente un difficile problema (forse il problema) della didattica dell'algebra è quello di costruire un'ingegneria didattica che favorisca i processi di condensazione e inibisca quelli di evaporazione. Usando la terminologia di Brousseau, in algebra è molto difficile preparare situazioni di apprendimento che siano di ri-contestualizzazione per gli allievi e provochino ri-de-contestualizzazione. A nostro avviso le argomentazioni sul linguaggio privato elaborate da Wittgenstein pongono seri dubbi sulla possibilità di una costruzione del sapere ufficiale in algebra (e in parte anche in aritmetica) secondo il metodo canonico delle situazioni problema.

La ricerca didattica ha messo ben in evidenza tutte le misconcezioni che possono emergere negli alunni nelle attività di tipo algebrico. La pratica insegna che in algebra occorre rinunciare al sogno di realizzare un'esperienza speciale sul terreno didattico che garantisca che il soggetto afferri una volta per tutte l'uso corretto di un formalismo, immunizzandolo da successivi possibili fraintendimenti del suo uso in situazioni differenti.

Nella sezione 2.3 analizzando le ragioni che portano i soggetti a non utilizzare il linguaggio algebrico come strumento di pensiero abbiamo posto la questione che il problema dell'apprendimento dell'algebra fosse un problema di interpretazione. L'analisi successivamente compiuta ci ha permesso di stabilire una stretta connessione tra senso di una espressione algebrica e sua interpretazione da parte dei membri di una comunità nel dominio e nelle circostanze di enunciazione in cui viene impiegata.

Se consideriamo infine tali risultati insieme alla descrizione dei principali processi che risultano coinvolti nella costruzione del sapere algebrico arriviamo alla ragionevole conclusione che la didattica dell'algebra debba essere tesa a ricercare un costante equilibrio tra esperienza interna del soggetto

e cultura ufficiale della comunità entro la quale il soggetto diventa, a pieno titolo, membro effettivo attraverso il processo di apprendimento.

Si tratta di individuare un modello di didattica che possa permettere di perseguire tale finalità.

Riteniamo che un modello di didattica dell'algebra come gioco di interpretazioni possa essere adeguato alla natura del sapere da apprendere e coerente con l'analisi dei principali processi coinvolti nell'apprendimento che abbiamo descritti.

Con il termine gioco intendiamo enfatizzare sia gli aspetti sociali che quelli connessi al problema wittgensteiniano della comprensione-applicazione delle regole.

Il gioco delle interpretazioni può realizzarsi su due piani tra i quali, ovviamente, può esserci una costante interazione: i) il gioco della interpretazione in cui il soggetto realizza interpretazioni diverse per mezzo, anche, di strumenti semiotici differenti; ii) il gioco delle interpretazioni connesso con i processi di negoziazione, che si possono realizzare attraverso una pratica didattica in cui risultano enfatizzati gli aspetti di interazione e di collaborazione sociale.

Per quanto riguarda i) osserviamo che esso si realizza quando per esempio si interpreta un testo espresso in un sistema semiotico (per es., un problema enunciato nel linguaggio ordinario) in un testo all'interno di un altro sistema (ad es., un'equazione); oppure si interpreta (trasforma) un testo in un sistema (ad es., un'espressione) in un altro testo nello stesso sistema (ad es., un'altra espressione). Per es., si consideri un problema da risolvere algebricamente (ad es., un problema enunciato a parole, una congettura da dimostrare, un fenomeno da modellizzare, ecc.): la soluzione è proprio un interpretante e un'espansione del testo di partenza in una catena di interpretazioni successive, motivate dalla questione posta dal problema. Ogni interpretazione mostra ciò che interpreta sotto una certa luce; nel far questo rende conoscibile qualcosa in più rispetto a ciò che viene interpretato. L'uso di strumenti semiotici diversi (per esempio, rappresentazione grafica, rappresentazione simbolica, linguaggio naturale, rappresentazione mediata dal calcolatore...) può favorire cambiamenti profondi nel modo in cui si usa il linguaggio algebrico in quanto può produrre modificazioni significative soprattutto di senso. Riteniamo che il passaggio da una interpretazione realizzata con uno stumento semiotico ad un'altra, realizzata attraverso un altro strumento, possa favorire la messa in atto di esperimenti mentali che creano anticipazione e ragionamento ipotetico. Attività di questo tipo sono infatti strettamente connesse con l'attivazione della funzione simbolica del linguaggio. Occorre sottolineare che in questo quadro la ripetuta costruzione di interpretanti è unificata e governata dagli scopi risolutivi posti dalla situazione problematica, cioé dalla messa in evidenza di un significato complessivo della stessa attraverso la realizzazione di una interpretazione (soluzione).

Per quanto riguarda ii) è nostra opinione che le attività di negoziazione in classe (si vedano i lavori M. Bartolini Bussi [91]) possano essere di aiuto per la costruzione di una didattica appropriata al tipo di sapere in gioco, ma la letteratura esistente non fornisce evidenza scientifica a questa opinione (anche perché molte ricerche di questo tipo riguardano altri campi, ad es. l'apprendimento della lingua)

Alcune esperienze che abbiamo realizzato, che illustreremo in seguito, ci portano a ritenere che le attività di negoziazione e di interazione possano essere particolarmente proficue per l'apprendimento in algebra. In generale esse possono avere una duplice validità . La prima, connessa con la relazione che si stabilisce tra senso e interpretazione in algebra, è volta alla costruzione di una base di esperienze algebriche e di significati associati a tali esperienze che possano essere socialmente condivisi dall'intero gruppo classe.

La seconda è volta alla costruzione di un legame tra esperienza interna del soggetto e cultura ufficiale della comunità con cui interagisce.

Gli strumenti semiotici sui quali il soggetto può contare per la costruzione di un interpretante del problema e le caratteristiche della pratica sociale nella quale il processo risolutivo si realizza concorrono a strutturare il <u>mondo risolutivo</u> nel quale il soggetto opera e condizionano il processo di apprendimento che prende forma in tale mondo.

In seguito faremo un esteso utilizzo dell'espressione mondo risolutivo; pertanto riteniamo opportuno specificare il significato che intendiamo attribuire a tale espressione in questo contesto d'uso.

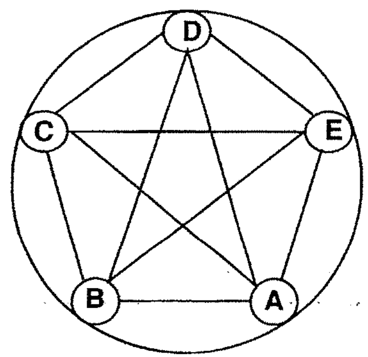
Un mondo risolutivo è un mondo nel quale il soggetto produce un interpretante relativo alla situazione problematica proposta.

Un mondo risolutivo è caratterizzato almeno dalle seguenti componenti: (A) le caratteristiche della situazione problematica da affrontare; (B) il sistema

di segni che viene utilizzato come mediatore del pensiero e dell'azione; (C) le caratteristiche della interazione sociale che in tale mondo si sviluppa in relazione al sapere in gioco; (D) il bagaglio di conoscenze che il soggetto possiede; (E) l'atteggiamento psicologico di colui che in tale mondo vuole/desidera/spera di/soffre nel/deve/è gratificato nel/... costruire un interpretante relativo alla situazione problematica proposta.

Va precisato che per il punto (B) i sistemi di segni mediatori del pensiero e dell'azione sono oltre a quelli del linguaggio naturale anche i "various systems for counting; algebraic symbol systems; works of arts; written schemes: diagrams, maps and mechanical drawings, all sort of conventional signs"(Vygotsky): tutti insieme costituiscono i cosiddetti <u>strumenti semiotici</u> per il pensiero; mentre per il punto (C) notiamo come anche l'interazione con il calcolatore debba essere considerata a tutti gli effetti come una interazione sociale (Tikhomirov [91]).

Un mondo risolutivo è quindi definito dalle mutue relazioni che si stabiliscono tra le componenti che caratterizzano tale mondo.



A Caratteristiche del problema; **B** Sistema di segni utilizzato;
C Caratteristiche dell'interazione; **D** Conoscenza dell'alunno;
E Atteggiamento psicologico dell'alunno.

Il concetto di mondo risolutivo è sistemico. Ciascun alunno sviluppa la propria azione risolutiva all'interno di un proprio mondo risolutivo e contemporaneamente contribuisce a caratterizzare il mondo risolutivo delle persone con cui interagisce, e viceversa. Una modificazione sostanziale di una delle componenti del mondo risolutivo determina un cambiamento dell'intero mondo risolutivo, perché si modificano le mutue relazioni che si stabiliscono tra le componenti del mondo. In questo caso parleremo di cambiamento di mondo risolutivo. Pertanto una stessa situazione problematica può essere affrontata all'interno di mondi risolutivi diversi.

Il modello di didattica dell'algebra verso il quale conduce la nostra riflessione si può quindi configurare come <u>gioco di interpretazioni in/attraverso mondi risolutivi diversi</u>. Nel seguito, attraverso riflessioni su esperienze didattiche realizzate con alunni della scuola elementare e della scuola media, cercheremo di evidenziare possibili applicazioni di tale modello nel processo di insegnamento.

PARTE TERZA

IL GIOCO DELLE INTERPRETAZIONI COME APPROCCIO ALL'ALGEBRA INSEGNATA.

3.0 Introduzione.

Come discusso nelle due parti precedenti, l'algebra rende disponibile un linguaggio simbolico per mezzo del quale è possibile affrontare e risolvere problemi.

Il linguaggio simbolico dell'algebra svolge l'importante funzione di accrescere la possibilità di pensiero, di ragionamento, di conoscenza del singolo individuo e consente inoltre la comunicazione intenzionale, razionale del prodotto del proprio pensiero.

Gli alunni devono scoprire questa funzionalità e questa potenzialità del linguaggio simbolico dell'algebra e imparare ad utilizzarle sia per spiegare, interpretare quantitativamente fenomeni e risolvere problemi della realtà extramatematica o matematica, sia per permettere, in relazione ad essi, una comunicazione intenzionale.

Nelle parti precedenti abbiamo analizzato l'algebra anche come linguaggio, costruendo un quadro di riferimento teorico che spieghi il modo in cui questo linguaggio viene utilizzato in una forma efficace per le problematiche didattiche.

In questi paragrafi cercheremo finalmente di impiegare tale analisi non solo per spiegare le difficoltà che gli alunni incontrano nell'approccio all'algebra, ma anche per delineare un quadro di riferimento teorico per mezzo del quale analizzare le problematiche connesse con il modo in cui l'algebra si insegna e si apprende. Limiteremo la nostra indagine alla scuola dell'obbligo.

Siamo infatti interessati ad analizzare attraverso quale impostazione didattica sia possibile, a questo livello scolastico, favorire uno sviluppo della capacità di governare la funzione simbolica e la funzione algoritmica del linguaggio algebrico, in accordo con la semantica intensionale ed estensionale che ne caratterizzano la natura. Riteniamo che ciò possa risultare proficuo anche per indirizzare ricerche di ingegneria didattica per progettare itinerari didattici che prevedano l'acquisizione del linguaggio algebrico in modo sempre più fluente ed espressivo.

3.1 Problematiche connesse con l'uso del formalismo nel dominio aritmetico.

Una prima considerazione riguarda il bagaglio di conoscenze relativo all'utilizzo della notazione simbolica che gli alunni possiedono quando iniziano l'approccio all'algebra nella scuola dell'obbligo.

Varie ricerche hanno messo in evidenza una serie di misconcezioni che si manifestano già nell'utilizzo della notazione simbolica all'interno del dominio aritmetico.

Bell [92] per esempio nota che nel seguente test sottoposto ad alunni di 11 anni:

$$11-6=\square - 11$$

le risposte errate "5" e "6" indicano nel primo caso una fissazione su una nozione primaria in base alla quale /=/ significa "esegui", nel secondo caso la persistenza di una assunzione di commutatività della sottrazione derivante da esperienze con i numeri naturali non sostenute da una adeguata riflessione.

L'aritmetica utilizza un insieme di segni che storicamente sono stati sviluppati nel dominio dell'algebra che svolgono la funzione di codificare il calcolo che si vuole effettuare. Si tratta dei simboli delle operazioni , delle parentesi per definire priorità nel calcolo, del segno /=/, oltre che della rappresentazione dei numeri interi e decimali con la notazione posizionale. Notiamo però che il ruolo di strumento semiotico che viene attribuito a tali segni nel dominio dell'aritmetica è, in genere, molto limitato. Infatti la soluzione di un problema si realizza attraverso l'utilizzo degli algoritmi di calcolo e si esprime attraverso un uso sistematico dei simboli delle operazioni, ma il risultato di volta in volta trovato è considerato come una tappa che risulta accessoria ai ragionamenti espressi in linguaggio naturale, che costituiscono il cuore del processo risolutivo. D'altra parte i simboli utilizzati risultano essere prevalentemente uno strumento per esprimere in modo sintetico tale ragionamento.

Storicamente la soluzione aritmetica si presenta come un discorso, un discorso che si deve pronunciare tutto di un fiato perché il sapere aritmetico è principalmente un saper fare orale (Chevallard [89]) connesso, a nostro avviso, a buone capacità di tipo progettuale. La progettualità riguarda i modi più efficaci di utilizzare il sistema di numerazione dato per effettuare operazioni di quantificazione (conteggio e calcolo) che risultino pertinenti e appropriate per il problema che si sta risolvendo. In altre parole la progettualità riguarda la capacità di mettere in atto strategie di quantificazione appropriate per la struttura matematica soggiacente al problema ed efficienti in relazione al sistema di numerazione dato.

L'uso degli algoritmi di calcolo e l'introduzione dei simboli algebrici nel corpo dell'aritmetica rispondono quindi storicamente ad esigenze di economia di pensiero e di efficienza operativa . Tali simboli ed algoritmi costituiscono senza dubbio importanti strumenti che permettono sintesi nella rappresentazione della soluzione ed efficienza nella quantificazione. Ciò avviene se tali strumenti sono in mano a persone che hanno sviluppato capacità operative e progettuali nell'uso del sistema di numerazione dato all'interno di situazioni problematiche concrete.

Osserviamo invece che in mano ad alunni che non hanno sviluppato capacità progettuali, i segni delle operazioni possono incorporare una semantica molto povera, coincidente con ciò che denota l'esecuzione del calcolo corrispondente.

A tale riguardo è utile ricordare che gli alunni possono essere in grado di compiere operazioni di questo tipo:

7 4 -	$^{6}7^{1}4$ -
3 9 =	3 9 =
-----	-----
	3 5

attribuendo alle procedure messe in atto un adeguato senso aritmetico, che tuttavia non é sufficiente a garantire l'uso corretto di tali operazioni in contesti problematici che le contemplano come soluzioni.

In casi come questi la sintassi e la semantica di tale operazione risultano dissociate; l'alunno infatti può essere in grado di controllare una serie di principi di tipo sintattico e di manipolare i numeri anche senza aver sviluppato semantiche appropriate in relazione alle strutture di problemi in cui i segni di operazione e gli algoritmi di calcolo possono venire impiegati per realizzare soluzioni.

La dissociazione tra sintassi e semantica può quindi realizzarsi anche all'interno del dominio aritmetico ed essere causa di numerosi errori, sui quali molto spesso risulta difficile intervenire. Nell'approccio all'algebra essa

costituisce il retroterra dal quale si possono derivare dissociazioni ancora più profonde .

La costruzione di una buona padronanza del formalismo matematico all'interno del dominio aritmetico comporta la capacità di dominare il livello sintattico e semantico di tale formalismo. Ciò si realizza attribuendo alle espressioni aritmetiche costruite in accordo con le opportune regole sintattiche sensi appropriati in relazione ai problemi concreti in cui vengono impiegate.

Dal punto di vista didattico la costruzione di tale padronanza nell'uso del formalismo matematico non è facile da sviluppare negli alunni.

Per esempio nella pratica didattica ordinaria risulta molto difficile per gli insegnanti intervenire in modo adeguato di fronte a scritture di questo tipo (prodotte dagli alunni come espressioni risolutive di problemi):

2500- 6500=4000	invece di	6500-2500=4000
3*1500-8000= 3500	invece di	8000-3*1500= 3500

Per quanto riguarda la prima espressione , notiamo che molto spesso l'errore che l'insegnate mette in evidenza è visto dall'alunno come una mancanza di precisione che tuttavia non intacca la sostanza del proprio ragionamento. "Ah si, va be" è in genere la risposta disarmante di fronte alla quale gli insegnanti si sentono impotenti per la mancanza di modi di intervento diversi dalla semplice correzione.

L'errore compiuto dall'alunno mette ben in evidenza la separazione che si può determinare nell'uso del formalismo tra il piano semantico, incorporato in un ragionamento basato prevalentemente sul linguaggio naturale e il piano sintattico. La costruzione dell'espressione risolutiva avviene senza alcuna verifica di correttezza delle regole di produzione usate in relazione al senso del proprio ragionamento.

Anche il secondo esempio sopra riportato evidenzia una separazione tra piano semantico e piano sintattico nell'uso del formalismo matematico a livello aritmetico. In questo caso tale separazione sembra dovuta ad un utilizzo della funzione algoritmica del linguaggio simbolico che appare governato dalla assunzione di una natura stenografica, invece che ideografica, di tale linguaggio, in rapporto alla semantica inglobata nel ragionamento espresso in linguaggio naturale.

Una prima riflessione che occorre compiere riguarda gli interventi didattici che a nostro avviso concorrono ad alimentare gli ostacoli osservati, invece di limitarli.

I rischi di una introduzione molto precoce del formalismo matematico sono stati sottolineati da molte ricerche; dal punto di vista cognitivo l'introduzione precoce dei simboli di operazione e degli algoritmi di calcolo scritto può ostacolare lo sviluppo del saper fare aritmetico.

In tali ricerche si è anche osservato che molto spesso l'uso del formalismo viene introdotto nella soluzione dei problemi senza tenere in considerazione le <u>contraddizioni</u> che si possono determinare con le strategie spontanee di risoluzione del bambino. Per esempio la richiesta di formalizzare la soluzione di un problema con 1200-800=400 invece che con 800+400=1200, anche quando la soluzione spontanea del bambino è stata basata su una strategia di completamento, può contribuire alla costruzione di concezioni "pseudoformaliste" in quanto si viene immediatamente a determinare una rottura tra il senso inglobato nell'espressione e il senso della propria strategia.

Una seconda riflessione riguarda il modo in cui le convenzioni del calcolo vengono presentate nell'insegnamento tradizionale. Nella tradizione didattica corrente tali convenzioni vengono di norma presentate come un prodotto della cultura a cui l'alunno deve attenersi nello svolgimento dei compiti in cui è richiesto il rispetto di tali convenzioni. Nell'approccio tradizionale all'alunno è richiesto di prendere atto che tali convenzioni esistono; la capacità ad utilizzare tali convenzioni viene sviluppata attraverso lo svolgimento di attività ripetitive, quali la soluzione di espressioni aritmetiche, che hanno lo scopo di automatizzare certe procedure nell'utilizzo di tali convenzioni.

In questo contesto occorre sottolineare due questioni didatticamente rilevanti:

- i) il ruolo assegnato all'errore
- ii) il tipo di competenze che l'approccio tradizionale sviluppa.

Per quanto riguarda i) è evidente che l'insegnamento tradizionale non possa considerarlo che come una mancanza di padronanza dovuta allo scarso esercizio o alla disattenzione, valutabile in modo diverso in base alla persistenza e alla ricorrenza e superabile solamente attraverso consolidamenti

ulteriori. Notiamo però che la ricerca didattica, a questo riguardo, ha messo in evidenza come anche gli errori tradizionalmente considerati di distrazione siano quasi sempre dovuti a misconcezioni nel funzionamento delle regole di manipolazione simbolica (si veda precedente test di Bell).

Per quanto riguarda ii) notiamo che in questo tipo di compito vi è solo la costruzione di schemi di azione che funzionano da "copioni" per applicazioni successive. Le difficoltà nell'utilizzo del calcolo formale riemergono immediatamente nel momento in cui si passa alla costruzione di una espressione come soluzione di un problema aritmetico. In questo caso abbiamo osservato che anche se l'espressione costruita produce un risultato diverso dalla consueta procedura aritmetica, lo studente spesso non mette in discussione le regole di produzione che hanno consentito la costruzione del testo dell'espressione. In questo comportamento vediamo la radice di molti ostacoli ed errori che si ritroveranno nell'algebra: algebra intesa come insieme di regole, cioè come una sintassi senza semantica con il conseguente sviluppo di concezioni pseudoformaliste.

Una terza riflessione riguarda proprio l'analisi delle competenze che entrano in gioco in compiti di messa in espressione di un problema o nell'interpretazione di una espressione come soluzione di un problema.

Questi tipi di compito pongono l'alunno in una situazione di problem solving nuova (anche se egli è in grado di fornire una soluzione del problema) in quanto i vincoli e le regole del linguaggio formale impongono di ristrutturare l'azione in relazione ad una conoscenza che è diversa dal saper fare aritmetico.

Per capire le problematiche che sono coinvolte in questo tipo di compito occorre prendere in esame i complessi rapporti che si stabiliscono nel passaggio da una soluzione interamente governata dal linguaggio naturale ad una soluzione che deve tener conto dei vincoli del linguaggio simbolico.

Per l'alunno la scrittura di un'espressione non è assolutamente un modo naturale di scrivere la soluzione di un problema. La scrittura di un'espressione infatti non sempre coincide con la stenografia del processo risolutivo attraverso l'utilizzo dei segni algebrici e delle parentesi; l'espressione infatti non può essere vista solo come il riassunto di un procedimento risolutivo.

La scrittura di una espressione come soluzione di un problema comporta una trasformazione della soluzione sviluppata in accordo con la struttura sequenziale del linguaggio naturale in una rappresentazione in cui il processo operativo è regolato dalle proprietà e dalle convenzioni del calcolo algebrico.

Quindi la capacità di rispettare la priorità delle operazioni e di riconoscere una funzione operativa alla presenza delle parentesi nel calcolo di una espressione data, non si traduce automaticamente nella capacità di utilizzare tali competenze nella messa in espressione di un problema. In quest'ultimo compito infatti la natura dei processi coinvolti è ben diversa come abbiamo illustrato sopra. E' necessario infatti esercitare un forte controllo metacognitivo sulle strategie che vengono impiegate e sui dati che entrano in gioco .

L'attività metacognitiva necessaria per la soluzione del compito di "messa in forma di un'espressione" riguarda la capacità di porsi delle domande e di fare previsioni al fine di verificare se, in relazione al testo di espressione che via via viene prodotto, la soluzione che sarebbe possibile realizzare a partire dal testo, attraverso l'applicazione delle proprietà del calcolo, è in grado o meno di riflettere la soluzione aritmetica familiare.

La verifica ovviamente non deve coincidere con il calcolo dell'espressione con carta e penna, ma deve essere compiuta ricostruendo, in uno spazio mentale fittizio, la gerarchia delle trasformazioni che si dovranno compiere in base al testo realizzato, interpretandole in base al contesto problematico affrontato.

3.2 La conquista delle convenzioni del calcolo formale.

A questo punto occorre entrare direttamente nel merito di alcune questioni cruciali relative alla introduzione del formalismo algebrico in attività inserite nel dominio aritmetico. La domanda a cui cercheremo di dare una risposta può essere così formulata: e' possibile in questi contesti mettere in atto interventi didattici che favoriscano una piena conquista delle convenzioni che governano il calcolo simbolico e che forzino gli alunni a compiere riflessioni sul rapporto che si stabilisce tra "senso" e "denotazione" nelle espressioni aritmetiche?

Riteniamo che una piena conquista delle convenzioni e delle regole che governano la costruzione e il calcolo delle espressioni aritmetiche possa essere

favorita da attività nelle quali le convenzioni vengono utilizzate come strumento per negoziare la soluzione del problema nel linguaggio formale della matematica.

A livello di scuola elementare l'introduzione del formalismo dovrebbe avvenire mantenendo una stretta aderenza con le strategie di soluzione spontanee dell'alunno. L'alunno può essere condotto a cogliere le differenze di senso inglobate nelle espressioni aritmetiche confrontando tra loro espressioni formali diverse che costituiscono soluzioni corrette per uno stesso problema. Una pratica didattica ben gestita potrà inoltre mettere in evidenza come in alcuni casi ad intensioni diverse possa corrispondere la stessa denotazione (i.e.: 1200+ 350*4 e 1200+ 350+350+350+350) mentre in altri casi la denotazione cambia (i.e: 1800-400=1400 e 1400+400=1800).

Nel passaggio alla scuola media la riflessione sul formalismo matematico può essere condotta più in profondità. Prendiamo per esempio in considerazione l'attività riportata come allegato 2 alla relazione. Si tratta di una attività svolta in una classe prima (a Genova) e in una classe seconda (a Pavia) della scuola media. Il seguente problema viene somministrato agli alunni.

ATTIVITA' 1

1. Considera le seguenti relazioni generali:

   a) $(2n + 3) * 5 + 15 = R$

   b) $3n + 2 * 4 + 12 = R$

   c) $5 * (1 + 3n) = R$

Per ciascun caso, scrivi il testo a parole del giochino che, partendo da un qualsiasi numero pensato n, conduca al risultato R seguendo la sequenza di operazioni indicate.

2. In quali altri modi potresti scrivere la relazione c) in modo che il risultato non cambi?
3. Se R = 50 quanto vale n in a), b), c) ? Indica la sequenza di operazioni che fai per trovare n.
4. Se n = 5 quanto vale R in a), b), c). Indica la sequenza di operazioni che fai per trovare R.

L'insegnante raccoglie le schede e le corregge. Nella lezione successiva distribuisce una nuova scheda nella quale viene presentata la soluzione di un alunno relativa al quesito b) del problema.

Agli alunni che nel compito precedente hanno errato la risposta viene consegnato il testo riportante una interpretazione corretta dell'espressione /3n+2*4+12=R/

ATTIVITA' 2

Nell'esercizio di verifica un tuo compagno ha scritto un testo a parole di giochino matematico per descrivere come partendo da un numero pensato n si possa arrivare al risultato R rispettando la relazione generale :

3n + 2*4 + 12 = R

Ecco il suo testo ed i calcoli che esegue per trovare R nel caso in cui n=5.

"Pensa un numero, moltiplicalo per tre, moltiplica 2 per 4, aggiungi il risultato al numero pensato moltiplicato per tre, aggiungi 12 al risultato. Dimmi il risultato e io ti dico il numero pensato".

Se n = 5 allora R = 35 infatti:

*5*3+2*4+12=35*

A) Correggi il compito del tuo compagno, indicando gli eventuali errori e scrivi le tue considerazioni. Giustifica come ha ottenuto il risultato R = 35.

B) Come si può sapere quale numero è stato pensato se il risultato è 41? Motiva la risposta.

Agli alunni che hanno invece prodotto una risposta corretta viene consegnato una interpretazione errata.

ATTIVITA' 3

Nell'esercizio di verifica un tuo compagno ha scritto un testo a parole di giochino matematico per descrivere come partendo da un numero pensato n si possa arrivare al risultato R rispettando la relazione generale :

3n + 2*4 + 12 = R

Ecco il suo testo ed i calcoli che esegue per trovare R nel caso in cui n=5.

"Pensa un numero, moltiplicalo per tre, aggiungi due, moltiplica per quattro e aggiungi 12, dimmi il risultato e io ti dico il numero pensato".

Se n = 5 allora R = 80 infatti:

*5*3= 15   15+2=17   17*4=68   68+12=80*

A) Correggi il compito del tuo compagno, indicando gli eventuali errori e scrivi le tue considerazioni.

B) Come si può sapere quale numero è stato pensato se il risultato è 41?
Motiva la risposta.

Agli alunni viene richiesto di correggere eventuali errori compiuti dal compagno e di commentare l'interpretazione che egli ne ha dato.

Di seguito riportiamo alcune risposte di alunni.

ESEMPI DI SOLUZIONI DI ALUNNI

Serena (riferendosi alla soluzione corretta proposta):

"Secondo me non si deve moltiplicare N x3 e poi aggiungerlo a 2x4, perché se fosse così la relazione generale sarebbe questa:

(N x 3) + (2 x 4) + 12 =R

invece si deve fare 3N +2 il risultato x4, poi +12."

Roberto (riferendosi alla soluzione corretta proposta):

"Ad un certo punto nel testo del mio compagno dice di moltiplicare 2 x 4 invece di addizionare il 2, poi bisogna moltiplicare il 4 e aggiungere il 12. Il risultato non è 35 ma 68".

Carlo (riferendosi alla soluzione errata proposta)

"E' sbagliato perché fa 15 +2 e poi il risultato x 4, mentre nella soluzione generale c'è scritto + 2x4 senza una parentesi dopo il +2, quindi avrebbe dovuto fare 15 + 8 (8=2 x4)".

Chiara (riferendosi alla soluzione errata proposta):

"Il compito è sbagliato perché:

5 x 3 =15+2 =17 no perché bisogna prima moltiplicare 2 x4, poi addizionare.

5 x3 = 15+2x4=15+8=23+12=35"

Giulia (riferendosi alla soluzione errata proposta):

"CONTROLLO TESTO

4 x3 + 2 x 4 + 12 =

12 +2

14 x4

56 + 12

68

Il testo è giusto secondo me : il procedimento del secondo esercizio è corretto"

L'attività è centrata su un continuo gioco tra interpretanti espressi in linguaggio naturale e interpretanti espressi attraverso il linguaggio simbolico dell'algebra. Di volta in volta l'uno costituisce l'interpretato e l'altro l'interpretante e viceversa.

L'attività è finalizzata a creare le condizioni perché gli alunni possano esplicitare le regole e le convenzioni che ritengono di dover applicare per eseguire il calcolo diretto e inverso dell'espressione. Con tale attività si intende portare allo scoperto le convenzioni che gli alunni utilizzano in modo tale da permettere un intervento didattico appropriato. La situazione didattica è costruita in modo tale da costringere gli alunni a prendere posizione in merito al sistema di regole e di convenzioni che essi ritengono siano soggiacenti alla esecuzione del calcolo formale, al fine di condurre successivamente in classe una ri-negoziazione del sistema di convenzioni connesse con l'uso del formalismo.

Dal punto di vista didattico c'è in questa attività una diversa attribuzione di ruolo all'errore compiuto dagli alunni, rispetto a quello assegnato dall'insegnamento tradizionale. Non si cerca di curare la malattia attraverso un uso massiccio di farmaci che agiscono sul sintomo, ma partendo dal sintomo si cerca di individuare le cause che lo determinano, cercando di risalire alla radice della malattia.

In questo contesto anche le soluzioni errate vengono utilizzate come strumento di negoziazione del sistema di convenzioni che regolano il calcolo formale, all'interno di una pratica sociale gestita in classe dall'insegnante. Il fine è costituito dalla <u>ri-scoperta</u> delle regole del calcolo formale come sistema di convenzioni socialmente condiviso da una comunità.

Anche attività più tradizionali, quali il calcolo di espressioni aritmetiche possono assumere una nuova luce se affrontate all'interno di mondi risolutivi diversi.

Prendiamo per esempio in considerazione la riflessione che può essere compiuta sull'espressione aritmetica all'interno del mondo risolutivo delle calcolatrici tascabili.

La necessità di adeguarsi alla logica di funzionamento del dispositivo e alla semantica denotativa soggiacente all'utilizzo del suo sistema di comandi permette di mettere in luce aspetti importanti relativi sia all'uso delle convenzioni di calcolo, sia ad aspetti di semantica denotativa dell'espressione aritmetica stessa.

Per esempio data la seguente espressione:

75-8*2

le sequenze di comandi sotto riportate

75 [-] 8 [*] 2 [=]

8 [*] 2 [M+] 75 [-] [RM] [=]

producono lo stesso risultato in un dispositivo che rispetta la priorità delle operazioni, mentre producono risultati diversi se implementate in un dispositivo che non rispetta le priorità delle operazioni.

Le riflessioni che si possono compiere attraverso l'interazione con la macchina possono condurre gli alunni a capire che c'è una convenzione inglobata nella logica di funzionamento della macchina. Di conseguenza le differenze nei risultati ottenuti utilizzando macchine diverse, vengono immediatamente interpretate come modificazioni dovute al sistema di convenzioni implementato, in quanto "la macchina non sbaglia, ma usa convenzioni diverse".

Attività di questo tipo possono essere condotte già a livello di scuola elementare. Tali attività possono risultare estremamente utili per mettere in evidenza le differenze profonde di senso e di denotazione che intercorrono nelle due espressioni:

3*1500-8000= e 8000-3*1500=

3.3 <u>Problematiche connesse con l'utilizzo del linguaggio algebrico</u>.

Nel passaggio all'algebra il sistema di rappresentazione delle relazioni si appoggia su un uso particolare di certi simboli già conosciuti nel dominio dell'aritmetica (i segni delle operazioni, le parentesi, il segno /=/) in connessione con l'introduzione dei simboli letterali. L'alunno deve imparare che operando algebricamente non è più il linguaggio ordinario che esprime il ragionamento, ma è il calcolo stesso che permette una rappresentazione del ragionamento.

Per padroneggiare l'algebra, l'allievo deve impadronirsi di una nuova sintassi.

Una delle difficoltà più importanti da affrontare nell'approccio all'algebra è legata al riconoscimento della struttura sintattica delle espressioni algebriche. La comprensione di una espressione algebrica non può essere dissociata dall'identificazione della sua struttura sintattica, cioè della forma del significato (Cauty,[84]).

Ciò appare determinante non solo in tutte le attività di costruzione e di interpretazione di espressioni simboliche ma, come vedremo, anche in quelle di manipolazione simbolica.

Per illustrare questo concetto prenderemo in esame una attività di dimostrazione di congetture sulle proprietà dei numeri interi nella quale entrano in gioco sia aspetti di generalizzazione che di trasformazione simbolica. Si tratta di un'attività inserita all'interno del progetto di Genova; in alcune classi ha comportato anche l'utilizzo di uno spreadsheet.

L'insieme dei numeri naturali viene utilizzato come realtà di studio ricca e stimolante in grado di favorire :

- processi di concettualizzazione di proprietà che risultano in qualche modo familiari all'alunno per l'esperienza che egli ha condotto in questo campo numerico;
- l'introduzione del calcolo letterale in un contesto d'uso motivante e controllabile nella complessità
- la riflessione su alcuni concetti importanti del pensiero matematico, quale quello di congettura, di verità di una proposizione, di dimostrazione, di verifica.

Nel seguito ci limiteremo ad analizzare alcune problematiche relative all'introduzione del linguaggio algebrico e del calcolo letterale.

Il primo problema che emerge è legato allo sviluppo delle capacità di assegnare nomi appropriati alle entità che entrano in gioco nella congettura da dimostrare (nominalizzazione).

Gli alunni in genere non hanno difficoltà ad utilizzare una lettera per nominare un certo oggetto o una certa entità numerica. Per esempio non si riscontrano particolari difficoltà nell'utilizzare la lettera /n/ per definire un qualsiasi numero intero. I problemi si presentano quando si devono scegliere i nomi da assegnare ad entità, in modo che essi risultino appropriati per la dimostrazione della congettura che si richiede di realizzare.

In questo contesto emergono due difficoltà che appaiono cruciali.

La prima riguarda lo sviluppo della capacità di costruire tali nomi utilizzando espressioni simboliche che non risultino chiuse, cioè che non diano

come risultato immediato un numero. La ricerca didattica ha messo ben in evidenza le difficoltà che emergono su questo terreno (cfr. §1.3).

La seconda difficoltà è specifica del processo di costruzione dei nomi da assegnare alle entità che entrano in gioco. Molto spesso assistiamo ad un processo di identificazione tra nome della cosa e cosa stessa, altre volte ad un mancato coordinamento con lo scopo della "messa in forma", o tra i vari aspetti della "messa in forma".

3.3.1 <u>Assegnare un nome in algebra</u>

Nell'approccio all'algebra il problema relativo alla assegnazione di un nome ad una entità è cruciale. Consideriamo, per esempio, il problema di come nominare un qualsiasi numero dispari o un qualsiasi numero pari.

Notiamo che se si lavora solamente sul terreno algebrico, il problema viene generalmente "risolto" attraverso la presentazione rispettivamente delle espressioni "2*n+1" o "2*n" da parte dell'insegnante. Qualche esempio numerico realizzato attraverso l'instanziazione della variabile /n/ da parte dell'insegnante, o compiuto dagli alunni su richiesta dell'insegnante, costituiscono, in generale, le uniche attività didattiche che vengono compiute per conferire un valore aggiunto di senso a tali espressioni. Difficilmente tali attività sono in grado di affrontare le difficoltà che abbiamo in precedenza descritto. Anzi si assiste molto spesso ad una sorta di identificazione tra nome dell'oggetto e oggetto che conduce inevitabilmente verso la costruzione del nome come designatore rigido di tale oggetto. Il protocollo di Anna (vedi allegato 1) mette ben in luce i rischi connessi con questo processo; ella infatti fatica a riconoscere nell'espressione /(k+1)/ un numero pari, se k è dispari, proprio perché l'espressione /2n/ si comporta da designatore rigido.

Consideriamo ora la stessa attività affrontata in un mondo risolutivo diverso da quello algebrico: il mondo risolutivo del foglio elettronico.

L'alunno opera su un foglio di lavoro all'interno del quale, nella colonna A, viene generata la sequenza dei numeri naturali, sino ad un determinato numero ragionevolmente grande (Fig 12).

Tale colonna, realizzata attraverso una formula per ricorrenza (vedi Fig. 13, colonna A) può essere preparata dall'insegnante o realizzata direttamente dall'alunno.

Dopo aver nominato con la lettera N i numeri rappresentati in tale colonna, all'alunno viene richiesto di trovare una formula universale che permetta di generare nella colonna B i numeri dispari, a partire dagli N della colonna A (Fig 13). L'alunno comincia ad inserire nella cella B2 la formula che, secondo lui, è in grado di risolvere il problema posto, quindi può copiare tale formula nelle altre celle della colonna. Il calcolo automatico realizzato dal computer in relazione alla formula inserita, permette all'alunno di verificare se la formula da lui realizzata è adeguata o meno al problema posto (Fig 14).

File Modifica

B2

	A	B
1	N	Dispari
2	0	
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	
10	8	
11	9	
12	10	
13	11	
14	12	

Fig 12

File Modifica

B2

	A	B
1	N	Dispari
2	0	=2*N+1
3	=A2+1	=2*N+1
4	=A3+1	=2*N+1
5	=A4+1	=2*N+1
6	=A5+1	=2*N+1
7	=A6+1	=2*N+1
8	=A7+1	=2*N+1
9	=A8+1	=2*N+1
10	=A9+1	=2*N+1
11	=A10+1	=2*N+1
12	=A11+1	=2*N+1
13	=A12+1	=2*N+1
14	=A13+1	=2*N+1

Fig. 13

File Modifica

B2

	A	B
1	N	Dispari
2	0	1
3	1	3
4	2	5
5	3	7
6	4	9
7	5	11
8	6	13
9	7	15
10	8	17
11	9	19
12	10	21
13	11	23
14	12	25

Fig. 14

In questa fase viene esaltata la polarità procedurale operativa (cfr. §2.1) connessa con la costruzione della formula, che assume, in questo mondo risolutivo, il ruolo di <u>strumento di trasformazione dei dati di ingresso in risultati</u>, secondo le regole di manipolazione inglobate nella logica di funzionamento del software.

In caso di errore, l'alunno può riprovare, apportando modifiche alla formula da lui introdotta. Tra alunno e calcolatore si instaura un meccanismo di interazione che risulta particolarmente proficuo per il superamento delle difficoltà precedentemente illustrate.

Attraverso il dialogo con la macchina l'alunno può mettere in atto processi costruttivi molto più complessi di quelli che sarebbero coinvolti in una attività con carta e penna, grazie al feedback che la macchina fornisce in relazione ai tentativi dell'alunno.

All'alunno vengono quindi proposte nuove sequenze di numeri (preparate dall'insegnante o costruite direttamente dall'alunno), e in relazione a ciascuna di esse viene richiesto di trovare una formula universale che permetta di generare la sequenza dei numeri interi dispari (Fig. 15,16,17).

Dispari

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	N	Dispari	K	Dispari	H	Dispari	P	Dispari	Q	Dispari	Z	Dispari
2	0		1		0		2		1		3	
3	1		2		2		4		3		5	
4	2		3		4		6		5		7	
5	3		4		6		8		7		9	
6	4		5		8		10		9		11	
7	5		6		10		12		11		13	
8	6		7		12		14		13		15	
9	7		8		14		16		15		17	
10	8		9		16		18		17		19	
11	9		10		18		20		19		21	
12	10		11		20		22		21		23	
13	11		12		22		24		23		25	
14	12		13		24		26		25		27	

Fig.15

Foglio di lavoro1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	N	Dispari	K	Dispari	H	Dispari	P	Dispari	Q	Dispari	Z	Dispari
2	0	=2*N+1	1	=2*K-1	0	=H+1	2	=P-1	1	=Q	3	=Z-2
3	=A2+1	=2*N+1	=C2+1	=2*K-1	=E2+2	=H+1	=G2+2	=P-1	=I2+2	=Q	=K2+2	=Z-2
4	=A3+1	=2*N+1	=C3+1	=2*K-1	=E3+2	=H+1	=G3+2	=P-1	=I3+2	=Q	=K3+2	=Z-2
5	=A4+1	=2*N+1	=C4+1	=2*K-1	=E4+2	=H+1	=G4+2	=P-1	=I4+2	=Q	=K4+2	=Z-2
6	=A5+1	=2*N+1	=C5+1	=2*K-1	=E5+2	=H+1	=G5+2	=P-1	=I5+2	=Q	=K5+2	=Z-2
7	=A6+1	=2*N+1	=C6+1	=2*K-1	=E6+2	=H+1	=G6+2	=P-1	=I6+2	=Q	=K6+2	=Z-2
8	=A7+1	=2*N+1	=C7+1	=2*K-1	=E7+2	=H+1	=G7+2	=P-1	=I7+2	=Q	=K7+2	=Z-2
9	=A8+1	=2*N+1	=C8+1	=2*K-1	=E8+2	=H+1	=G8+2	=P-1	=I8+2	=Q	=K8+2	=Z-2
10	=A9+1	=2*N+1	=C9+1	=2*K-1	=E9+2	=H+1	=G9+2	=P-1	=I9+2	=Q	=K9+2	=Z-2
11	=A10+1	=2*N+1	=C10+1	=2*K-1	=E10+2	=H+1	=G10+2	=P-1	=I10+2	=Q	=K10+	=Z-2
12	=A11+1	=2*N+1	=C11+1	=2*K-1	=E11+2	=H+1	=G11+2	=P-1	=I11+2	=Q	=K11+	=Z-2
13	=A12+1	=2*N+1	=C12+1	=2*K-1	=E12+2	=H+1	=G12+2	=P-1	=I12+2	=Q	=K12+	=Z-2
14	=A13+1	=2*N+1	=C13+1	=2*K-1	=E13+2	=H+1	=G13+2	=P-1	=I13+2	=Q	=K13+	=Z-2

Fig. 16

Foglio di lavoro1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	N	Dispari	K	Dispari	H	Dispari	P	Dispari	Q	Dispari	Z	Dispari
2	0	1	1	1	0	1	2	1	1	1	3	1
3	1	3	2	3	2	3	4	3	3	3	5	3
4	2	5	3	5	4	5	6	5	5	5	7	5
5	3	7	4	7	6	7	8	7	7	7	9	7
6	4	9	5	9	8	9	10	9	9	9	11	9
7	5	11	6	11	10	11	12	11	11	11	13	11
8	6	13	7	13	12	13	14	13	13	13	15	13
9	7	15	8	15	14	15	16	15	15	15	17	15
10	8	17	9	17	16	17	18	17	17	17	19	17
11	9	19	10	19	18	19	20	19	19	19	21	19
12	10	21	11	21	20	21	22	21	21	21	23	21
13	11	23	12	23	22	23	24	23	23	23	25	23
14	12	25	13	25	24	25	26	25	25	25	27	25
15												

Fig. 17

La possibilità di lavorare su una tavola numerica costruita attraverso il computer permette all'alunno di mettere in atto processi di pensiero di tipo anticipativo per afferrare globalmente alcune porzioni delle formule in grado di risolvere i problemi dati. La tavola numerica ottenuta attraverso la mediazione del computer provoca anticipazioni: essa diventa un oggetto ideale, nel senso che costituisce il punto di partenza per esperimenti che presto diventano puramente mentali; produce ragionamento ipotetico, validazione, un continuo passaggio dagli spazi mentali dell'alunno alla tavola per più approfonditi e nuovi esperimenti mentali per la costruzione della formula adeguata. Favorisce i processi di condensazione inibendo quelli di evaporazione.

Nell'attività compiuta nel mondo risolutivo dello spreadsheet gli alunni sviluppano un terreno di esperienze, di significati e di riferimenti comuni che possono essere successivamente utilizzati all'interno del mondo risolutivo algebrico per attribuire un senso ad espressioni del tipo:

/k-1/ rappresenta un numero pari se k è un numero dispari;

/k+1/ rappresenta un numero dispari se k è pari;

/2k+1/ rappresenta un numero dispari se k= 0,1,2,3...........

/2k-1/ rappresenta un numero dispari se k=1,2,3,4,......

....

che , come è noto, possono risultare agli occhi degli alunni prive di senso se presentate direttamente all'interno del dominio algebrico, senza alcuna mediazione didattica.

Il gioco di interpretanti tra mondi risolutivi diversi può svolgere un ruolo determinante nel processo di costruzione e di interpretazione di una espressione simbolica, in quanto può favorire cambiamenti che possono produrre modificazioni significative soprattutto di senso. Attraverso il gioco degli interpretanti il senso inglobato nella notazione simbolica algebrica può essere reso più trasparente, in quanto può appoggiarsi su riferimenti esterni di senso prodotto nel mondo risolutivo dello spreadsheet, che sono tuttavia pertinenti per mettere in evidenza la funzione sintattica dei diversi costituenti dell'espressione algebrica stessa.

Potendo contare su un bagaglio di significati sviluppato attraverso la mediazione del computer, nel mondo risolutivo algebrico la riflessione può investire il rapporto che si stabilisce tra significato dell'espressione e forma o struttura sintattica in cui tale significato è inglobato.

Si tratta di esplicitare e di rendere evidenti le proprietà che risultano inglobate nella struttura sintattica, in relazione al processo di nominalizzazione che caratterizza l'approccio algebrico. Per esempio l'espressione /2n/ rappresenta un intero pari (con n intero positivo o nullo) e la proprietà inglobata nella sua struttura "è essere multiplo di 2"; l'espressione /k+1/ rappresenta, se K è intero pari, un numero intero dispari, e la proprietà inglobata nella sua struttura sintattica è "essere il successore di un pari"...

Il ricorso al codice verbale può risultare uno strumento fondamentale per mettere in luce ed esplicitare le proprietà contenute nella struttura sintattica in relazione al processo di nominalizzazione che caratterizza l'approccio algebrico. Si tratta infatti di capire che ogni forma, ogni struttura sintattica "magnifica" alcune proprità dell'oggetto e ne "narcotizza" altre e che di conseguenza l'operazione di dare un nome ad un oggetto utilizzando variabili rappresenta una forma di predicazione, in quanto significa attribuire ad un oggetto una o più proprietà atte a classificarlo e a distinguerlo da altri oggetti.

A nostro avviso la conquista di tale consapevolezza può essere favorita da una pratica sociale condotta in classe dall'insegnante nella quale le riflessioni che gli alunni compiono sulle proprietà che sono magnificate nella struttura sintattica del nome assegnato ad un oggetto vengono sottoposte al confronto e alla verifica collettiva, anche in relazione ai significati costruiti nel mondo dello spreadsheet.

3.3.2 Esprimere le relazioni tra gli elementi del problema

Lo sviluppo della capacità di riconoscere proprietà nel nome assegnato ad una entità risulta cruciale sia per il processo di costruzione dell'espressione globale in grado di interpretare la situazione problematica in gioco, sia per orientare successivamente il processo di manipolazione simbolica in relazione allo scopo espresso nell'enunciato del problema.

Consideriamo per esempio i seguenti due problemi (il primo è ripreso da Chevallard et al.[1984] il secondo è presente da numerosi anni nel progetto genovese):

Problema 1:

"Utilizzando dei nomi ben scelti, mostra che:
- se x e y sono dei numeri pari, il numero x+y è pari
- se x è pari e y è dispari, x+y è dispari
- se x e y sono dispari, x+y è .....";

Problema 2:

"Utilizzando dei nomi ben scelti per indicare due numeri dispari consecutivi, mostra che la loro somma è un numero divisibile per 4"

Nella costruzione dell'espressione globale la scelta dei nomi per indicare gli oggetti in gioco si lega strettamente al controllo delle variabili che vengono introdotte per caratterizzare le proprietà che si vogliono magnificare di tali oggetti, in relazione al contesto di enunciazione del problema.

L'attività di costruzione dell'espressione simbolica globale richiede la capacità di disambiguare alla luce del codice algebrico le relazioni tra gli oggetti in gioco nella soluzione del problema.

Abbiamo visto nella sezione 2 come il pensiero non possa operare sintatticamente con il linguaggio algebrico, appoggiandosi sulla semantica del linguaggio naturale.

Infatti l'alunno può essere in grado di descrivere in linguaggio naturale le relazioni tra gli elementi in gioco nella soluzione del problema ma può essere incapace di esprimere tali relazioni attraverso un uso appropriato della/e variabile/i, perché non possiede una buona rappresentazione del rapporto tra semantica e sintassi interna al codice algebrico.

Per esempio ciò può condurre per il primo problema a costruire espressioni del tipo :

* 2h + 2h	invece di	2h + 2k
* 2h + 2h +1	invece di	2h + 2k+1
* 2h+1 + 2h+1	invece di	2h+1+ 2k + 1

e per il secondo problema, anche se in modo meno diffuso, ad espressioni del tipo :

* 2h + 1 + 2k + 1		
* 2h + 1 + 2k + 1 + 2	invece di	2h+1+2h+3

Osserviamo che errori di questo tipo, su problemi del tutto analoghi, li abbiamo trovati presenti anche negli studenti che frequentano il 1° anno di Università, all'inizio dei corsi di Istituzioni di Matematiche.

L'alunno cioè deve essere in grado di capire che nel primo problema occorre introdurre due variabili per disambiguare alla luce del codice algebrico le relazioni tra gli oggetti in gioco, in relazione allo scopo contenuto nell'enunciato del problema, mentre nel secondo problema è necessario introdurre una sola variabile.

L'attenzione su come utilizzare le variabili per esprimere le relazioni tra gli oggetti in gioco deve costituire oggetto di intervento didattico specifico, perché in tale compito è coinvolta la capacità di governare sia la funzione simbolica del linguaggio algebrico che quella algoritmica.

Osserviamo che per molti alunni la costruzione di tale capacità può risultare particolarmente difficile se non mediata in modo opportuno dall'intervento didattico. A tale riguardo notiamo che attività di tipo grafico come quelle proposte da Barra [86] possono favorire lo sviluppo di significati appropriati in relazione all'esplicitazione delle coreferenze tra gli oggetti in gioco. Tali significati, se opportunamente re-interpretati attraverso l'uso del linguaggio naturale, possono contribuire a disambiguare il tipo di riferimento che si stabilisce tra gli oggetti in gioco nella enuciazione del problema e possono guidare verso un utilizzo appropriato delle variabili. In ogni caso riteniamo che il problema possa essere affrontato solo attraverso un approccio sinergico centrato su un gioco di interpretazioni attuato in mondi risolutivi diversi che utilizzino sistemi di segni di diversa natura (grafica, linguaggio naturale, simbolica), e che siano caratterizzati da forme di interazione diversificate. Ciò ovviamente pone problemi di ingegneria e di gestione didattica notevoli, ma non eludibili.

3.3.3 La manipolazione simbolica.

La dimostrazione di una congettura richiede la necessità di intervenire sulla espressione simbolica realizzata al fine di attuare trasformazioni in grado di mostrare certe proprietà che non risultano evidenti nell'espressione di partenza.

Osserviamo che quando si esegue una manipolazione simbolica il significato è interamente incorporato all'interno dell'espressione, e il soggetto deve procedere senza la necessità di dover costantemente interpretare ciò che egli manipola. Tale significato è intimamente legato alle regole di manipolazione che possono essere applicate sull'espressione stessa, in relazione allo scopo della trasformazione. Il contesto problematico fornisce lo scopo ultimo della trasformazione, ma la manipolazione può procedere non necessariamente con la semantica fornita dal contesto, ma "con la forma del significato, cioè con la componente sintattica del segno o del simbolo"(Cauty, 1984).

Lo scopo può essere riferito alla determinazione delle condizioni che permettono di attribuire un valore di verità all'espressione simbolica (semantica denotativa) o essere finalizzato ad ottenere un certo livello di coerenza interpretativa o di senso nella struttura dell'espressione simbolica, in relazione all'enunciato del problema. In quest'ultimo caso la manipolazione simbolica porta a dimostrare che in relazione al contesto di enunciazione del problema, una espressione simbolica possiede una certa proprietà.

Una buona padronanza nella manipolazione simbolica è sicuramente legata alla qualità e alla quantità di pensiero anticipativo che il soggetto è in grado di mettere in atto in relazione agli effetti prodotti da una certa trasformazione sintattica sulla forma dell'espressione.

La produzione di una anticipazione sul terreno della trasformazione sintattica sembra procedere per selezione di alcuni elementi dell'espressione e per deduzione della anticipazione attraverso l'applicazione a tali elementi di uno o più schemi di manipolazione simbolica posseduti dal soggetto (Ferrero [92]). Il protocollo di Anna mette ben in evidenza questo processo ma contemporaneamente mostra anche che la capacità di produrre anticipazioni

sul terreno sintattico non è sufficiente, da sola, a guidare alla soluzione del compito.

Infatti una buona padronanza nella manipolazione simbolica sembra anche dipendere dalla capacità di costruire un'immagine di possibile stato finale dell'espressione , in accordo con lo scopo del problema. A seconda della situazione ciò può richiedere un cambiamento profondo della cornice in cui l'anticipazione viene prodotta, che sembra dipendere da un cambiamento del frame utilizzato per interpretare la forma dell'espressione. Si veda per esempio l'episodio 5 del protocollo di Anna in cui la decisione di attuare una sostituzione (anticipazione di un'immagine di stato finale dell'espressione) è connesso ad un cambiamento di frame utilizzato per leggere e interpretare l'espressione, come è già stato evidenziato nel paragrafo 2.3. In questo quadro lo scopo funziona da potenziale attivatore di anticipazioni circa la proprietà ultima che l'espressione dovrà incorporare affinchè essa possa esprimere un senso in relazione all'obiettivo da perseguire. Ovviamente una tale immagine di stato finale dell'espressione, tranne i casi più banali, non si sviluppa necessariamente all'inizio dell'attività di manipolazione simbolica , ma si costruisce nel corso della trasformazione stessa, all'interno di un processo in cui il pensiero governa dialetticamente sia la componente semantica relativa al rapporto tra forma e scopo che la componente sintattica della trasformazione.

Tale dialettica non si sviluppa in modo lineare: a seconda delle situazioni, della difficoltà del compito, e forse anche delle caratteristiche del soggetto una delle componenti può guidare l'altra, e viceversa. I casi estremi sono costituiti dalle "passeggiate sintattiche esplorative", sulle quali successivamente il soggetto dovrà cercare di mettere in atto processi interpretativi per valutarne la pertinenza in relazione allo scopo, o dalle situazioni in cui la trasformazione è invece strettamente guidata dalla semantica del contesto.

La riflessione sulle capacità che risultano coinvolte nella manipolazione simbolica è di grande importanza sul terreno didattico perché pone il problema di come sviluppare le capacità cognitive e metacognitive che risultano coinvolte in questo tipo di compito.

L'approccio alla manipolazione simbolica può essere compiuto in due modi profondamente diversi:

- in modo completamente decontestualizzato (che è il modo in cui tradizionalmente viene presentato il calcolo letterale)

- all'interno di un contesto problematico nel quale la manipolazione simbolica diventa strumento che permette di raggiungere un determinato obiettivo.

Riteniamo che il secondo modo offra maggiori opportunità di chiarire all'alunno il senso profondo della funzione trasformativa del linguaggio simbolico dell'algebra, quale strumento per il pensiero nella soluzione dei problemi. Un esempio tratto da Chevallard [84] può aiutare a comprenderne meglio le ragioni.

Nell'insegnamento tradizionale il calcolo letterale è presentato attraverso compiti di questo tipo:

Calcolare : $x+(x+1)$

Cosa ben diversa è inserire lo stesso calcolo all'interno di un problema come nell'esempio seguente:

"*Sia x un numero intero e sia y il suo successore. Assegnando un nome appropriato a x+y, mostra che questo numero è dispari.*"

Occorre notare che l'inserimento della trasformazione simbolica all'interno di un problema può anche motivare lo sviluppo di trasformazioni che normalmente non vengono messe in atto negli approcci decontestualizzati:

"*Mostra che un numero intero dispari può essere scritto come la somma di due numeri interi successivi*" [Sol.: $2x+1 = x + (x+1)$].

Pensiamo che un tale approccio possa anche permettere la costruzione dei primi schemi di manipolazione simbolica in contesti in cui gli aspetti di apprendimento di tipo tecnico si legano strettamente agli aspetti funzionali.

Notiamo inoltre che nell'approccio tradizionale tutti i processi cognitivi e metacognitivi connessi con la costruzione di un'immagine possibile dell'espressione, in relazione ad uno scopo, risultano coinvolti in modo pressochè marginale, in quanto lo scopo della manipolazione quasi sempre coincide con l'ottenimento della forma di scrittura più semplificata dell'espressione di partenza.

Ovviamente un approccio contestualizzato alla manipolazione simbolica non dovrebbe escludere la necessità di effettuare riflessioni anche di natura esclusivamente sintattica. Notiamo però che in tali attività dovrebbe venire

privilegiata la qualità della riflessione di tipo sintattico che viene compiuta rispetto allo sviluppo di automatismi come risultato della quantità degli esercizi risolti (che invece contraddistingue l'approccio tradizionale): si veda un esempio per le superiori in Gallo [92]. Purtroppo le proposte didattiche che sono state prodotte a livello di scuola dell'obbligo in questa direzione risultano ancora insufficienti.

Detto ciò dobbiamo rilevare un problema di fondo che caratterizza il processo di insegnamento/apprendimento della manipolazione simbolica.

Anche la costruzione di situazioni didattiche più motivanti sul piano semantico e sintattico nelle quali inserire l'attività di manipolazione simbolica non sembrano di per sè sufficienti a caratterizzare un mondo risolutivo nel quale la maggioranza degli alunni possa sviluppare quelle capacità cognitive e metacognitive che sono indispensabili per utilizzare la manipolazione simbolica quale strumento per il pensiero nella soluzione dei problemi.

Come intervenire se un alunno non vede che in una certa situazione conviene compiere una certa fattorizzazione piuttosto che un'altra? Come favorire cioè il processo di selezione degli elementi da prendere in considerazione? Come favorire il processo di deduzione dell'anticipazione connesso con la scelta dello schema di manipolazione da applicare sui dati selezionati? Quale tipo di interazione si sarebbe potuto mettere in atto con Anna per favorire la costruzione di un'immagine di stato finale dell'espressione se non fosse riuscita da sola a risolvere il compito?

In gioco, infatti, non c'è solo la possibilità di giungere alla soluzione del compito attraverso l'aiuto o la mediazione di un intervento esterno, ma la costruzione dei processi cognitivi che sono soggiacenti alla soluzione del compito.

La difficoltà che riscontriamo nel rispondere a tali domande è dovuta al fatto che nella manipolazione simbolica non è possibile separare il processo di pensiero che conduce ad effettuare una certa manipolazione dal prodotto di questo pensiero. In questo contesto la situazione è profondamente diversa da quella che abbiamo analizzato quando abbiamo affrontato il problema della conquista delle convenzioni del calcolo formale o in quelle relative al processo di nominalizzazione o di costruzione di un'espressione simbolica risolutiva di un problema. In quei contesti era possibile un gioco di interpretanti in mondi risolutivi diversi in grado di favorire la costruzione di esperienze e significati comuni che potevano essere utilizzati nuovamente per la costruzione del sapere in gioco. Nel campo della manipolazione simbolica la situazione è profondamente diversa. Se dall'esterno si agisce sul prodotto, cioè sull'espressione, automaticamente si inibisce la possibilità di una costruzione autonoma dell'anticipazione, e quindi dei processi cognitivi e di controllo che permettono di realizzare tale anticipazione e d'altra parte non sembra neanche possibile riuscire ad intervenire sul processo di pensiero nel momento in cui questo si sviluppa.

Allo stato attuale la ricerca didattica non dà elementi per andare oltre la presa d'atto del problema. E' possibile che in futuro risultati più approfonditi possano scaturire da un'analisi del ruolo dei manipolatori simbolici implementati sul calcolatore in relazione allo sviluppo di competenze coinvolte in questo tipo di attività.

3.4 Linguaggio algebrico e modellizzazione.

L'utilizzo del linguaggio algebrico permette di considerare sotto una luce nuova anche l'attività di soluzione dei problemi della realtà.

L'algebra cambia il modo in cui i problemi possono venire affrontati in quanto l'attività risolutiva si caratterizza per l'introduzione sistematica della rappresentazione letterale nel problema algebrico, tanto per le quantità sconosciute che per le quantità conosciute, che presenta il principale vantaggio di trattare il caso generale e non il caso particolare e di interessarsi alla struttura dei problemi piuttosto che alla loro espressione.

L'utilizzo del linguaggio algebrico consente quindi di compiere un salto qualitativo nel modo di concepire l'attività risolutiva di un problema della realtà; essendo ora possibile affrontare la soluzione del caso generale e non solo del caso particolare, l'attività risolutiva si caratterizza come attività di costruzione di un modello risolutivo per una classe di problemi e non solo come attività di ricerca di un risultato per un problema specifico.

L'attività di modellizzazione si concretizza nella possibilità di utilizzare le lettere non solo per indicare le incognite ma anche per indicare le quantità che si ritengono conosciute. Come già sottolineato da Chevallard, l'attività di modellizzazione consente di saldare strettamente tra loro i legami molto naturali tra tre ambiti diversi, che appaiono generalmente scollegati nell'insegnamento tradizionale e cioè messa in formula, funzione, equazione.

L'approccio all'algebra non può quindi essere scisso dalla necessità di impiegare tutti gli strumenti che l'algebra fornisce per la soluzione dei problemi della realtà, in modo che risulti evidente il salto qualitativo che l'algebra consente.

Occorre innanzitutto osservare che l'attività di modellizzazione richiede contemporaneamente un cambiamento di atteggiamento dell'alunno nei confronti del problema e un cambiamento di premesse che egli deve assumere per poterlo affrontare e risolvere.

Il cambiamento di atteggiamento riguarda la costruzione della disponibilità ad affrontare problemi che risultano aperti, che non richiedono la ricerca immediata di un risultato numerico da realizzarsi nell'arco di una lezione e che quindi non sono più classificabili all'interno del paradigma risolutivo dell'aritmetica.

Il cambiamento di premesse è strettamente connesso con l'utilizzo del nuovo sapere algebrico nel campo della soluzione dei problemi e riguarda l'interiorizzazione del fatto che le quantità sconosciute possono essere trattate come conosciute, che i dati conosciuti possono essere espressi in modo generale, che lo sforzo risolutivo è teso a "determinare l'incognita mediante funzioni di quantità conosciute, o che si considerano come conosciute" (J.L.Lagrange, cit.).

Dal punto di vista didattico ciò solleva importanti questioni relative alla individuazione delle scelte più opportune che conviene compiere nell'avvicinare gli alunni della scuola dell'obbligo all'attività di modellizzazione.

Le esperienze sulle quali abbiamo riflettuto in questi anni hanno mostrato chiaramente che l'inserimento dell'alunno in una attività di modellizzazione produce risultati poco soddisfacenti se attuato all'interno di un itinerario didattico centrato sull'analisi del fenomeno o del problema da affrontare, con la richiesta di individuare ed esplicitare in un modello (formula) le relazioni tra le variabili in gioco. Le difficoltà che gli alunni hanno evidenziato nel processo di costruzione autonoma del modello hanno messo chiaramente in luce l'incapacità di tale approccio di costruire gradualmente quei cambiamenti di atteggiamento e quell'assunzione di nuove premesse che risultano fondamentali per governare l'attività di modellizzazione.

Allo stato attuale riteniamo che a livello di scuola dell'obbligo l'approccio all'attività di modellizzazione debba avere al suo centro, non tanto lo sviluppo della capacità di costruire modelli, quanto l'obiettivo di capire l'utilità della modellizzazione.

Le stesse operazioni cognitive che intervengono nella costruzione di modelli possono anche svilupparsi all'inizio attraverso approcci diversi centrati per esempio sulla comprensione di modelli costruiti da altri, all'interno di itinerari didattici in cui il ruolo della mediazione didattica dell'insegnante risulta cruciale. Si ritiene infatti che per un allievo che non abbia esperienze di modellizzazione sia preferibile esplorare le potenzialità e i meccanismi della modellizzazione prima di inserirlo in un'esperienza di modellizzazione autonoma.

Per illustrare e giustificare questo punto di vista faremo ampio riferimento ad una attività di modellizzazione realizzata in una classe terza da R. Garuti che è secondo noi emblematica di questa impostazione didattica (Garuti, 1992). In questo contesto ci limiteremo a dare una descrizione sommaria di come è stata impostata l'attività.

Con tale attività si vuole condurre gli alunni a costruire gli aspetti concettuali coinvolti nel processo di modellizzazione che risultano necessari per la padronanza del fenomeno fisico dell'allungamento di un elastico.

L'attività didattica si articola in 4 fasi.

Fase 1: Nella prima fase viene presentata agli alunni una scheda nella quale sono riportati dati sperimentali relativi all'allungamento di un elastico al variare del numero di graffette appese ad esso. Date le seguenti quattro formule si richiede di indicare quella che è in accordo con i dati della tabella e di spiegare i motivi per i quali sono scartate le altre, facendo meno calcoli possibili.

1) $L = 20 * (1 + N)$
2) $L = 20 - 0{,}2*N$
3) $L = 20 + 0{,}2*N$
4) $L = 20 + 20*N$

Fase 2: Vengono effettuati esperimenti in classe utilizzando due tipi di elastici "da cucito"; per il materiale da appendere vengono impiegati maccheroni.

Costruite le due tabelle dei dati sperimentali, agli alunni viene proposta la seguente formula:

$$L = H + K*N$$

e viene richiesto loro di determinare H e K in modo che essa risulti in accordo con i dati sperimentali dei due esperimenti e di illustrare il modo attraverso il quale essi sono pervenuti a tali risultati.

Fase 3: Su uno stesso riferimento cartesiano vengono costruiti i grafici relativi alle due formule realizzate. Agli alunni viene richiesto di individuare quali delle due rette corrisponda ad ognuna delle due formule individuate. L'attività di riflessione sul grafico è tesa alla individuazione del significato da attribuire ai parametri sia dal punto di vista fisico che dal punto di vista geometrico. Vengono utilizzati i grafici per compiere riflessioni sulle situazioni limite.

Fase 4: Viene posto il problema : l'allungamento dipende dalla lunghezza dell'elastico?

Nella discussione in classe vengono prodotte tre ipotesi: "no perché gli elastici sono dello stesso tipo", " l'elastico più lungo si allunga di più perché ha più roba da tirare, essendo più lungo", "l'elastico più lungo si allunga di meno perché oppone più resistenza".

Viene richiesto di rappresentare graficamente ognuna delle tre ipotesi.

Segue quindi la riflessione sui grafici realizzati e collettivamente viene scelta l'ipotesi più plausibile alla luce dei nuovi spunti di interpretazione offerti dai grafici.

L'esecuzione di una nuova prova sperimentale permette di confrontare le ipotesi prodotte con i risultati, consentendo di approfondire le ragioni per cui ciascuna di esse risulta in accordo o in disaccordo con tali risultati.

Osserviamo che tutta l'attività didattica è impostata in modo tale da realizzare un forte equilibrio nell'utilizzo dei tre sistemi di segni che vengono assunti di volta in volta per produrre interpretanti del fenomeno: grafico, formula e tabella. I tre sistemi di segni contribuiscono a caratterizzare tre mondi risolutivi diversi nei quali l'alunno di volta in volta opera. L'attività all'interno dei tre mondi non è attuata in sequenza, come succede negli itinerari didattici più "tradizionali" e "lineari"; tutta l'attività è orchestrata in modo tale che l'alunno debba costantemente passare da un mondo risolutivo all'altro; ogni intrepretante che viene prodotto all'interno di un mondo viene costantemente "smontato" e i significati che ne emergono vengono utilizzati per capire meglio o per produrre interpretanti negli altri mondi.

Il mondo risolutivo in cui l'alunno opera si modifica inoltre in relazione alle caratteristiche dell'interazione sociale che risulta coinvolta in ciascuna attività realizzata.

Ogni interpretante del fenomeno viene prodotto individualmente e successivamente viene sottoposto al confronto e alla verifica collettiva.

Il meccanismo dell'interazione sociale sembra svolgere un ruolo particolarmente proficuo su due aspetti fondamentali dell'attività didattica. Permette innanzitutto di sottoporre ad una verifica collettiva anche le interpretazioni che sono errate (si veda per esempio l'interpretazione del coefficiente di allungamento dell'elastico inteso come peso di ogni graffetta appesa). La pratica sociale sembra favorire il riconoscimento di anomalie nelle interpretazioni prodotte, in quanto arricchisce la possibilità di prendere in esame modi di ragionare e strategie di soluzioni profondamente diverse. Ciò è utile sia per colui che ha prodotto l'interpretazione errata ma anche per coloro che sono chiamati a riflettere e a esprimere un parere su tale interpretazione.

Inoltre, su alcuni aspetti cruciali dell'esperienza didattica il meccanismo dell'interazione sociale permette di inserire gli alunni all'interno di un gioco di ipotesi collettivo, che ha lo scopo di favorire la capacità di utilizzare la propria conoscenza per generare ipotesi interpretative del fenomeno. Il confronto con la realtà, attuato attraverso le varie prove sperimentali, permette si sottoporre a verifica le ipotesi che gli alunni hanno generato ("Col terzo esperimento ho imparato a provare le ipotesi degli altri anche se le ritenevo sbagliate e ho capito che io ho ragionato più sulla formula che sulla realtà e se anche mi credevo nel giusto non lo ero").

Un riflessione particolare merita il ruolo giocato dalla rappresentazione grafica nell'attività didattica svolta.

Riportiamo dall'articolo di Garuti (Garuti [92]).

"La rappresentazione grafica delle formule in esame assume un ruolo di mediatore importante tra formula e fenomeno fisico rappresentato. Da un lato infatti il grafico rappresenta la formula rendendola "visibile", dall'altro "libera" il fenomeno da quelle irregolarità e complessità che distraggono l'attenzione nel momento in cui si cerca di analizzare gli effetti delle diverse variabili. Durante questa attività, dopo l'effettuazione degli esperimenti, il grafico diventa centrale perché serve a discutere della validità delle formule in relazione al valore da attibuire a K (coefficiente angolare se il riferimento è alla retta e coefficiente di allungamento se il riferimento è al fenomeno fisico). E' ancora il grafico che conduce gli allievi a interrogarsi circa la dipendenza del fenomeno dalla variabile lunghezza iniziale dell'elastico e consente di rappresentare graficamente le diverse ipotesi......... Il grafico si è rivelato uno strumento potente per immaginare e discutere su situazioni non direttamente esplorabili come i casi limite del fenomeno rappresentato, casi che difficilmente, almeno a questo livello di età, avrebbero potuto essere evocati dalla formula $L=H+K*N$ (per $K=0$ e $K=\infty$) e tantomeno dall'analisi del fenomeno"

Un'ultima osservazione riguarda le ricadute di un'esperienza di questo tipo su un ambito che non è risultato coinvolto direttamente nell'attività.

La Garuti osserva che qualche tempo dopo un alunno risolve una equazione del tipo $(ax+b=cx+d)$ facendo esplicito riferimento al modello del grafico degli elastici *"Mi sono venuti in mente gli elastici, uno va più forte, uno va più piano. Quindi ho detto: c'è un punto che si incontrano e secondo me era la soluzione dell'equazione".*

La metafora prodotta dall'alunno, e registrata dall'insegnante, mostra che, nel risolvere una equazione della forma $/ax+b=cx+d/$, egli mette in atto un processo risolutivo per analogia, sfruttando l'esperienza compiuta nella modellizzazione del fenomeno dell'allungamento degli elastici . La metafora nasce sicuramente dal riconoscimento di alcune proprietà comuni nella struttura dell'equazione che l'alunno sta risolvendo in relazione alla struttura delle funzioni con le quali ha operato nel processo di modellizzazione. L'osservazione dell'alunno è interessante perché solleva l'importante questione di come affrontare in classe il concetto di equazione.

3.3.5 Didattica delle equazioni

Tradizionalmente l'approccio alle equazioni viene effettuato prima di introdurre il concetto di funzione; l'equazione viene, in genere, presentata come un nuovo strumento che permette di affrontare e risolvere problemi. I primi problemi che vengono affrontati con gli alunni in genere sono già stati ampiamente risolti nel dominio dell'aritmetica; essi vengono nuovamente affrontati proprio per mettere in luce l'approccio risolutivo diverso che l'algebra permette (vedi testo del problema riportato a pag. 10).

Agli alunni viene spiegato che in algebra, diversamente dall'aritmetica, la quantità sconosciuta può essere assunta come conosciuta e , attraverso la notazione simbolica, è possibile scrivere una espressione (equazione) che descrive le relazioni tra gli oggetti in gioco nel problema e conduce, per mezzo del calcolo, alla soluzione del problema stesso. La presentazione delle regole di manipolazione simbolica attuato attraverso le mediazioni didattiche più diverse (i.e. bilancia) mostra agli alunni come sia possibile giungere alla risoluzione del problema. Segue quindi la verifica.

Nella prima parte, illustrando il lavoro di Chevallard abbiamo evidenziato alcune problematiche di tipo storico-epistemologico che riguardano questa impostazione didattica. Ora ci interessa analizzare questo metodo in relazione alle possibilità che esso offre agli allievi di giungere a padroneggiare il concetto di equazione, anche attraverso il confronto con altri approcci didattici.

Negli ultimi anni la ricerca didattica ha messo in luce tutta una serie di misconcezioni che si possono sviluppare negli alunni in relazione al concetto di equazione. Sfard [92] mostra per esempio come gli alunni delle scuole superiori, in genere, non siano in grado di dare giustificazioni reali delle operazioni permesse nella soluzione di una equazione; tali operazioni agli occhi degli alunni appaiono spesso come delle "regole del gioco" più o meno arbitrarie.

Per questi studenti, che la Sfard chiama pseudo-formalisti, la soluzione di un'equazione è intesa come un designatore rigido di un qualcosa del tipo: "ho fatto le manipolazioni "magiche" e sono giunto a x =1/3; quindi ho terminato e 1/3 è la soluzione"(/soluzione/ significa processo terminato e /verifica/

significa metti 1/3 nell'equazione e trovi per esempio che 14/3=14/3, il che segnala che tutto va bene.).

Come abbiamo già sottolineato nei paragrafi precedenti è difficile rompere il circolo vizioso di questi procedimenti.

Notiamo che con l'approccio di tipo "tradizionale" si può generare un divario profondo tra la concezione di equazione che l'insegnante possiede e quella che invece l'alunno sviluppa. In relazione al sapere in gioco, tra gli alunni (soprattutto della fascia bassa della classe) e l'insegnante si può infatti generare un distacco difficilmente colmabile attraverso un approccio didattico di questo tipo.

Il dislivello tra i loro due mondi di esperienza e di conoscenza può essere talmente profondo da non poter essere colmato attraverso tentativi di mediazioni didattiche volte a semplificare o a elementarizzare il più possibile il sapere in gioco (vedi uso delle bilance o semplificazione dei problemi in cui applicare le equazioni). L'alunno sembra allora essere sordo alle parole, agli esempi, agli stimoli dell'insegnante e d'altra parte l'insegnante sembra essere sordo al mondo delle rappresentazioni, delle concezioni dell'alunno. Per questo motivo altri metodi sono interessanti.

Negli ultimi anni , anche in relazione al crescente interesse che si è sviluppato sul terreno del mathematical modelling soprattutto negli USA (che ha investito inizialmente l'insegnamento universitario e successivamente anche l'insegnamento secondario e primario), si registra una tendenza sempre più marcata a introdurre le equazioni dopo aver sviluppato il concetto di funzione.

In questo quadro le funzioni vengono presentate come relazioni dove le variabili di output dipendono in modo non ambiguo dalle variabili di input. Secondo alcuni autori questo tipo di concettualizzazione appare molto produttiva in quanto permette di fare del processo di modellizzazione algebrico un'attività concettualmente coerente per gli alunni.

La soluzione dell'equazione viene presentata come la ricerca del valore incognito in un dominio comune per il quale due funzioni hanno uguale output. Così risolvere l'equazione /5x+3=2x+4/ significa trovare per quale valore di x, all'interno di un dominio comune, le funzioni $f(x) = 5x+3$ e $g(x)=2x+4$ producono lo stesso risultato.

I propugnatori di questa impostazione didattica (vedi Chazan [92]) ne sottolineano le potenzialità sul terreno dell'apprendimento in relazione alla possibilità di affrontare la soluzione dell'equazione attraverso approcci differenti dalla manipolazione simbolica usuale. Questa impostazione infatti non esclude la possibilità di risolvere l'equazione applicando le operazioni che preservano l'insieme di verità dell'equazione, creando così equazioni equivalenti sino a quando l'insieme di soluzione risulta comprensibile attraverso l'ispezione diretta (ad es. x=1/3).

Osserviamo inoltre che questo approccio permette anche di ancorare il metodo risolutivo "classico", tipicamente sintattico, ad una base semantica sviluppata in un mondo risolutivo che risulta più chiaro per l'allievo.

In questi casi infatti è ad esempio possibile risolvere l'equazione attraverso la costruzione di una tavola di valori per le funzioni f(x) e g(x), limitando efficacemente il dominio nel quale la soluzione è da ricercarsi. Si tratta di un approccio per tentativi ed errori nel quale l'alunno deve cercare di tenere sotto controllo l'esecuzione del calcolo numerico al fine di trovare un'approssimazione adeguata che possa costituire il risultato dell'equazione.

La soluzione può essere ottenuta anche per via grafica disegnando le due funzioni e proiettando il punto di intersezione dei due grafici nel dominio comune.

Riteniamo che un approccio didattico che inserisca la soluzione dell'equazione all'interno di un gioco di interpretanti caratterizzati da un utilizzo di strumenti semiotici diversi di rappresentazione può a nostro avviso limitare gli incovenienti di tipo pseudo formalista lamentati dalla Sfard.

In base alle esperienze compiute pensiamo infatti che il cambio di mondo risolutivo permetta di rompere il circolo vizioso in cui il processo di insegnamento/apprendimento si può venire a trovare nell'approccio alle equazioni. La soluzione attraverso la costruzione della tabella (soluzione : x= 0,33..) costruisce un senso completamente diverso per la soluzione x=1/3, come ancora completamente diverso è il senso costruito attraverso la soluzione di tipo grafico.

Occorre notare che queste passeggiate tra mondi risolutivi sono produttive se vengono attuate non in giustapposizione tra loro ma all'interno di un itinerario che permetta un costante processo di andata e ritorno tra i diversi mondi. La situazione didattica deve pertanto comportare che il passaggio tra mondi sia fortemente accessibile; ciò costituisce una condizione necessaria

perché si abbia lo sviluppo di affinità di significato che arricchisca quello ottenuto attraverso la manipolazione simbolica ordinaria.

Ciò ci porta a compiere le seguenti considerazioni:

Attraverso una impostazione di questo tipo si evidenzia almeno un doppio senso con il quale si approcciano i numeri come "1/3".

a) 1/3 ha un senso "algebrico" come segno aggiunto agli interi (naturali) per rendere possibile la divisione, conservando le proprietà formali. E' tendenzialmente un designatore rigido che favorisce gli pseudo formalisti. Si noti che 1/3 è soluzione dell'equazione 5x+3=2x+4

b) 1/3 ha un senso "numerico" come prodotto di un processo di calcolo attuato attraverso un approccio per tentativi ed errori nella costruzione della tabella , che conduce per esempio a trovare la soluzione x=0.33..

Mentre il senso a) è legato al relazionale e il suo senso facilmente evapora in quanto la conservazione delle proprietà formali è astratta e sintattica, il senso b) è procedurale e fortemente semantico. Il senso b) risulta controllato abbastanza bene dagli allievi.

Comprendere che "1/3 è soluzione dell'equazione 5x+3=2x+4" implica collegare 1/3 con i due mondi interpretativi.

Sfard [92] nota che una delle difficoltà più evidenti e diffuse nell'apprendimento del concetto di equazione è relativa proprio alla capacità di vedere l'intera equazione come una qualche complessa rappresentazione di un certo insieme di numeri (the "truth set" of the equation).

Questa capacità segna il passaggio ad una forma più astratta di concepire le equazioni che può essere ottenuta solamente se i significati sviluppati attraverso il processo di calcolo numerico che accompagna la soluzione dell'equazione condensano nella struttura formale dell'equazione stessa.

La comprensione dei sensi, numerico e algebrico, di concetti come "1/3 è soluzione dell'equazione 5x+3=2x+4" implica un collegamento non banale tra di essi: occorre l'interazione tra il senso di 1/3 nel mondo (risolutivo) degli ampliamenti formali e quello di "0,3..." nel mondo (risolutivo) delle approssimazioni numeriche. Il collegamento può avvenire tramite una condensazione, tutt'altro che banale, in quanto i due mondi sono tendenzialmente separati, per il citato circolo vizioso. Gli studenti si portano dietro questa inaccessibilità fino all'università. Ad esempio gli studenti del 1° anno trovano difficoltà a seguire il seguente ragionamento:

Problema: Determinare le prime tre cifre esatte di $\sqrt{2}$.
Soluzione:

$$(\sqrt{2})^2=2$$

x: $1<2<3<4<5<....$ $\qquad 1<\sqrt{2}<2$

x^2: $1<4<9<16<25<..$

1° cifra è 1

x: $1.0<1.1<1.2<1.3<1.4<1.5<...$

x^2: $1.0<1.21<1.44<1.69<1.96<2.25<.....$

2° cifra è 4

ecc...

In questo problema gli alunni non legano il senso di:
"$\sqrt{2}$ = soluzione di x^2-2=0" con " $\sqrt{2}$ = numero decimale"

Essi pertanto non governano il processo precedente, anche se sanno risolvere problemi molto più difficili nel mondo risolutivo "numeri decimali ordinati" e nel mondo risolutivo "equazioni".

Il problema di trovare i mediatori che rendano accessibili i diversi mondi risolutivi è cruciale per la didattica dell'algebra.

Il concetto di funzione, così come è usato nelle esperienze cui accennavamo sopra, sembra essere uno strumento di una qualche utilità, così pure come gli strumenti informatici che permettono la manipolazione grafica e simbolica.

Ma molta ricerca in merito deve essere ancora fatta.

BIBLIOGRAFIA

Arzarello F., 1989, The role of conceptual models in the activity of problem solving, *Actes de PME XIII*, Vol I, Paris.

Arzarello F.,Bulgarelli E., Cascio G., Genta M.P., Gilardi M., Magnani R.,1990, La matrice aritmetica dei problemi algebrici, *Manoscritto presentato alla I Scuola Estiva in Didattica della Matematica*, Torino.

Arzarello F., 1991a, Algebraic problem solving, *Proc. of NATO Advanced Research Workshop*, Viana do Castelo, Portugal.

Arzarello F., 1991b, Procedural and relational aspects of algebraic thinking, *Proc. of PME XV*, Assisi.

Arzarello F., Chiappini G.P., Lemut E., Malara N., Pellerey M.,1993, "Learning to program as a cognitive apprentiship through conflicts" in Lemut, Du Bulay, Dettori (eds.) *Cognitive Models and Intelligent Environment for Learning Programming*, NATO ASI Series, Vol. F111, Springer - Verlag, Berlin.

Arzarello F., Bazzini L.,Chiappini G.P., 1993, Cognitive processes in algebraic thinking: towards a theoretical framework, *Proc. of PME XVII*, Japan.

Arzarello F., Bazzini L.,Chiappini G.P., Intensional Semantics as a tool to analyze algebraic thinking, *Proc. of Workshop on Algebraic Learning*, Torino 1992; in corso di stampa.

Barra M. (1986), Knowing how to prove, *Comptes rendus de la IVème ècole d'ètè de didactique des mathematiques.*, IREM, Universitè de Paris VII.

Bednarz N., Radford L., Janvier B., Lepage A., 1992, Arithmetical and algebraic thinking in problem solving, *Proc. PME XVI*, Durham N.H., Vol.I.

Bell A., Malone J.A., Taylor P.C., 1987, Algebra - An exploratory teaching experiment, *Shell Centre*, Nottingham.

Beth E.W., Piaget J., 1966, *Mathematical epistemology and psychology*, Reidel Publ.Comp., Dordrecht, Holland.

Boero P., Chiappini G., Lemut E., Martinelli A.M., 1989, Sul ragionamento ipotetico nell'approccio alla risoluzione di problemi con il calcolatore, *Publ. IMA* n. 21/89, Genova