Capitolo 4

Proporzioni e grafici

4.1 Relazioni tra grandezze fisiche

Un aspetto importante della scienza sperimentale è lo studio delle relazioni matematiche in grado di interpretare il tipo di proporzionalità esistente tra due grandezze fisiche prese in esame.

L'analisi dello spazio S percorso da un oggetto in moto in funzione del tempo "t" permette, ad esempio, di ottenere la misura della velocità; lo studio del volume V di un corpo in funzione della sua massa M consente di ricavarne la densità; la misura dell'allungamento ΔL di una molla causato dalla forza F ad essa applicata ci permette di conoscere il valore della costante elastica del materiale studiato …

Il modo di procedere è, in sintesi, il seguente: una volta che siano stati ottenuti un numero sufficientemente elevato di valori tra loro correlati (ad esempio, diverse misure di volume V in funzione della massa M dello stesso oggetto), essi vengono riportati in un grafico cartesiano X,Y.

I valori della *variabile indipendente* V (il volume) devono essere riportati sull'asse X delle ascisse, quelli della *variabile dipendente* M (la massa, in questo caso) sull'asse Y delle ordinate.

Il tipo di curva su cui i punti tendono ad allinearsi (in modo più o meno preciso, a causa della presenza di errori casuali che alterano leggermente i valori sperimentali delle singole misure) permette di ricavare la proporzionalità che lega le due grandezze studiate: nel nostro esempio, la massa e il volume.

Nel caso in cui non ci fosse nessuna relazione tra X e Y, allora la disposizione dei punti nel grafico sarebbe completamente casuale e confusa.

Consideriamo ora delle espressioni algebriche del tipo:

$y = 2x$ oppure

$y = 4x$

A partire da queste equazioni, costruiamo una tabella di numeri nel seguente modo: poiché la "x" è la variabile indipendente, attribuiamo ad essa dei valori a nostro piacimento, ad esempio 0, 1, 2, 3, 4, 5. Sostituiamo questi numeri alla "x" e ricaviamo il corrispondente valore della "y". Otteniamo così le seguente tabella:

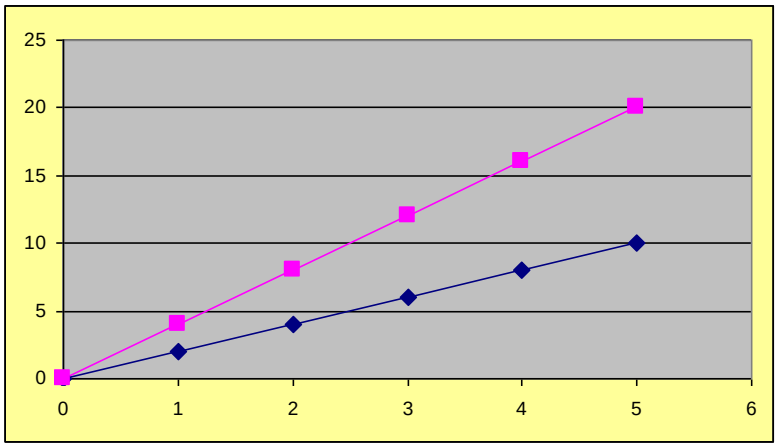
x	0	1	2	3	4	5
y	0	2	4	6	8	10

Facciamo lo stesso per la seconda equazione, attribuendo alla "x" gli stessi valori solo per ragioni di comodo. Notiamo però, come i valori della "y" siano invece sensibilmente diversi:

x	0	1	2	3	4	5
y	0	4	8	12	16	20

Se ora riportiamo queste due serie di numeri in un grafico cartesiano, possiamo facilmente notare come i punti che le rappresentino vadano a disporsi su due rette passanti entrambe per l'origine, ma di inclinazione differente: la maggiore inclinazione della seconda retta è chiaramente dovuta al valore più alto del coefficiente moltiplicativo della "x": 4 contro 2.

Per questo motivo tale numero, d'importanza fondamentale per il nostro discorso, prende il nome di *coefficiente angolare.*



Consideriamo ora due espressioni del tipo:

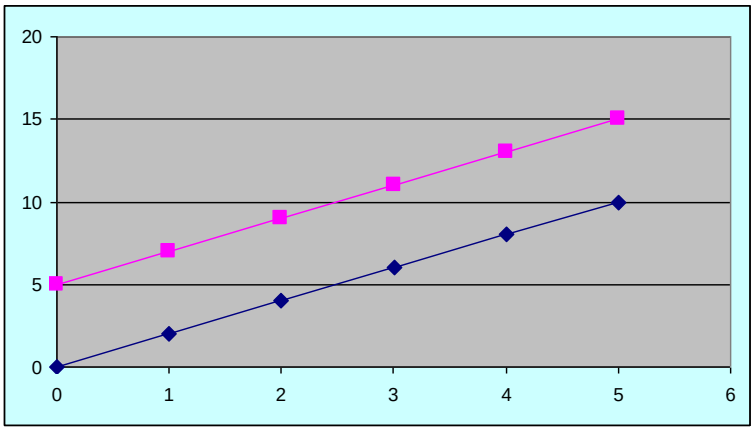
$y = 2x$

$y = 2x+5$

Ripetiamo il procedimento precedente. Attribuiamo dei valori comodi alla "x" e ricaviamo quelli della variabile indipendente "y": riportiamo poi i valori così ottenuti in un grafico cartesiano.

Otteniamo la seguente tabella:

x	0	1	2	3	4	5
y	5	7	9	11	13	15



Le due rette che si ottengono hanno ora lo stesso coefficiente angolare, cioè la stessa inclinazione. Sono quindi perfettamente parallele, ma differiscono per il valore iniziale, quello in cui esse intercettano l'asse delle "y" e che risulta essere uguale al numero che accompagna il termine "2x" (0 nel primo caso, +5 nel secondo).

Vediamo ora di generalizzare le conclusioni a cui siamo arrivati. Possiamo affermare che:

1. l'equazione generale di una retta in un piano cartesiano è del tipo

$$y = mx + q$$

2. il valore del <u>coefficiente angolare</u> *m* determina l'inclinazione della retta
3. il valore del coefficiente *q* (detto <u>intercetta all'origine</u>) definisce l'intersezione della retta con l'asse delle ordinate

Abbiamo così imparato a disegnare una retta in un piano cartesiano, supposta nota a priori la sua equazione.

<u>Nella pratica di laboratorio è però importante saper fare anche e soprattutto il contrario</u>, cioè saper *ricavare l'equazione di una retta, noto a priori il suo grafico cartesiano.*

Quando i punti sperimentali ricavati dalle nostre misure di laboratorio, una volta riportati in un piano cartesiano, si dispongono automaticamente su di una retta, noi dobbiamo ricavarne l'equazione arrivando in qualche modo a determinare i coefficienti *m* e *q*.

Il primo passo è capire se l'intersezione della retta con l'origine vale zero oppure no. A tale proposito dobbiamo chiederci cosa succede quando la "x" assume valore nullo: se la logica ci dice che in tale situazione anche la "y" è ragionevolmente nulla, la retta passa necessariamente per l'origine. Ricordiamo al proposito che per noi le due variabili "x" e "y" sono in realtà delle grandezze fisiche: se un oggetto ha massa M nulla, anche il suo volume V è nullo !! <u>Quest'affermazione non è una misura: deriva dalla logica delle cose</u> !!

Andiamo adesso a determinare il *coefficiente angolare* della retta ottenuta unendo a matita i punti sperimentali.

Come già detto in precedenza, questo coefficiente è strettamente correlato alla pendenza della retta, cioè all'angolo α che essa forma rispetto alla direzione positiva dell'asse delle ascisse. La sua espressione numerica (che, si badi bene, non è uguale al valore dell'angolo α, pur dipendendo

strettamente da esso) esprime matematicamente la costante di proporzionalità che lega le variabili studiate.

Per ottenere tale valore si considerino due punti A e B qualunque appartenenti alla retta, e quindi non necessariamente coincidenti con i nostri dati sperimentali: siano $(X_A; Y_A)$ e $(X_B; Y_B)$ le rispettive coordinate.

Si definisce *coefficiente angolare k* l'espressione:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(Y_A - Y_B)}{(X_A - X_B)}$$

Se la retta passa per l'origine degli assi cartesiani, si può prendere questo punto come uno dei due da inserire nell'espressione sopra, e ciò semplifica i conti (le sue coordinate, infatti, sono nulle). Noto infine *m*, supposto $q = 0$, otteniamo l'equazione

$$y = m\,x$$

con la quale è possibile spiegare in termini rigorosi il fenomeno fisico studiato.

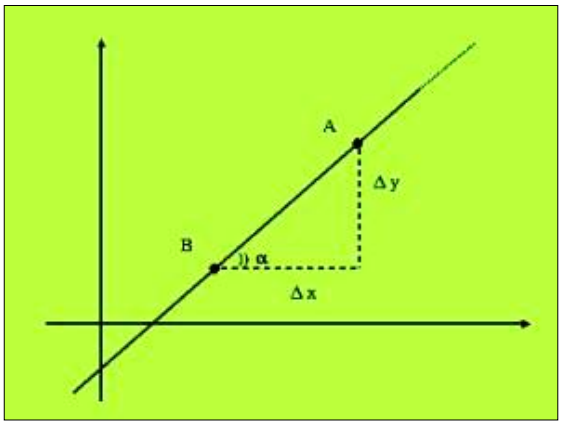


Fig. 1 – *Definizione di* ***coefficiente angolare*** *di una retta. Esso è in relazione con l'angolo α che la retta forma con la direzione positiva dell'asse delle ascisse. I punti A e B devono essere presi sulla retta stessa, mentre, per la presenza inevitabile degli errori casuali, i punti sperimentali potrebbero anche non essere perfettamente allineati.*

3.1. Tipi di proporzionalità

I principali tipi di proporzionalità che intercorrono tra due variabili X e Y sono cinque: proporzionalità diretta, proporzionalità lineare, proporzionalità inversa, proporzionalità quadratica, proporzionalità quadratica inversa.

Proporzionalità diretta - Si ha una proporzionalità diretta se la curva che approssima i dati sperimentali è una retta passante per l'origine, di equazione:

$$y = m\,x$$

In questo caso la relazione è tale che, se raddoppio o triplico il valore della variabile indipendente *x*, anche il valore della variabile dipendente *y* sarà raddoppiato o triplicato.

Proporzionalità lineare - Avremo invece una relazione di tipo lineare se i punti sperimentali cadono su di una retta non passante per l'origine, di equazione:

$$y = m\,x + q$$

dove ricordiamo che *q* è l'intersezione della retta con l'asse delle ordinate. In questo caso non è più vero che al raddoppiare del valore di *x* raddoppia anche la *y*. La relazione che lega le due incognite è invece la seguente: se *x* aumenta di una certa quantità H, allora *y* aumenta sempre della stessa quantità K (attenzione: K è diverso da H!!).

Proporzionalità inversa - Si ha il caso di una proporzionalità inversa se i punti si dispongono su di un'iperbole equilatera asintotica ai due assi cartesiani, una curva, cioè, che verifichi l'espressione:

$$y = \frac{k}{x}$$

La relazione che lega le variabili in questo caso è tale che, se una raddoppia, l'altra dimezza il proprio valore; se la prima triplica, la seconda diventa un terzo . . .

Proporzionalità quadratica - I valori sperimentali sono legati da una proporzionalità quadratica se i punti si dispongono su una parabola di equazione:

$$y = k\,x^2$$

In questo caso, se la "x" aumenta di 2, 3, 4, 5 volte, la "y" aumenta secondo il quadrato di tali quantità, cioè di 4, 9, 16, 25 . . . volte.

Proporzionalità quadratica inversa - L'ultimo caso che consideriamo è la proporzionalità quadratica inversa. I punti sperimentali si dispongono lungo una curva dall'andamento "simile" (ma non uguale !!) ad una iperbole equilatera e devono soddisfare l'equazione:

$$y = \frac{k}{x^2}$$

L'esistenza di una relazione matematica in grado di interpretare i dati sperimentali ci permette di inquadrare il fenomeno studiato in un contesto più generale e di ottenere previsioni che ne estendono la comprensione oltre i valori effettivamente testati in laboratorio. Questo diventa possibile operando un processo di **interpolazione** o di **estrapolazione** dei dati conosciuti. Con *l'interpolazione* si cerca di determinare un valore intermedio a due misure già in nostro possesso; con *l'estrapolazione* si tenta di prolungare la curva oltre l'ultimo dato sperimentato in laboratorio. In entrambi i casi si sostituisce un semplice e veloce calcolo matematico ad un reale processo di misura, più lungo e complicato da realizzare.

La correttezza del risultato ottenuto si fonda sull'esistenza di una precisa legge di proporzionalità che lega le grandezze studiate: se non si conoscesse questa legge, o se essa non esistesse affatto, i processi di interpolazione o estrapolazione sarebbero impossibili da applicare.

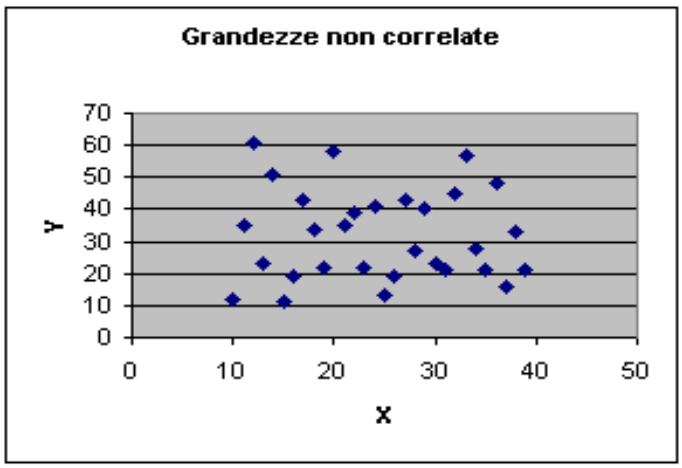


Fig. 2 - *Se non esiste nessun tipo di relazione fisica tra le due grandezze X e Y studiate, i loro valori si distribuiscono caoticamente nel piano cartesiano. In tal caso le due grandezze si dicono "non correlate".*

Bisogna comunque porre la massima cautela in queste operazioni e in modo particolare nell'estrapolazione, nel senso che bisogna preventivamente assicurarsi che la relazione matematica che si sta usando sia veramente sensata e che continui a valere oltre i limiti effettivamente verificati dallo sperimentatore in laboratorio; se ciò non avviene, si possono compiere grossolani errori.

Supponiamo, infatti, di voler verificare la *legge di Hooke* sugli allungamenti di una molla in funzione dei pesi ad essa applicati. L'estrapolazione della relazione ottenuta in laboratorio a valori sensibilmente superiori al peso maggiore tra quelli utilizzati, può condurre a clamorosi errori. Oltre un certo limite di tensione, infatti, la molla non è più in grado di allungarsi linearmente: perde elasticità ed inizia a deformarsi, arrivando anche alla rottura. Il risultato ottenuto con un processo di estrapolazione che non tenga conto di questi limiti, sarebbe svuotato di ogni significato scientifico.

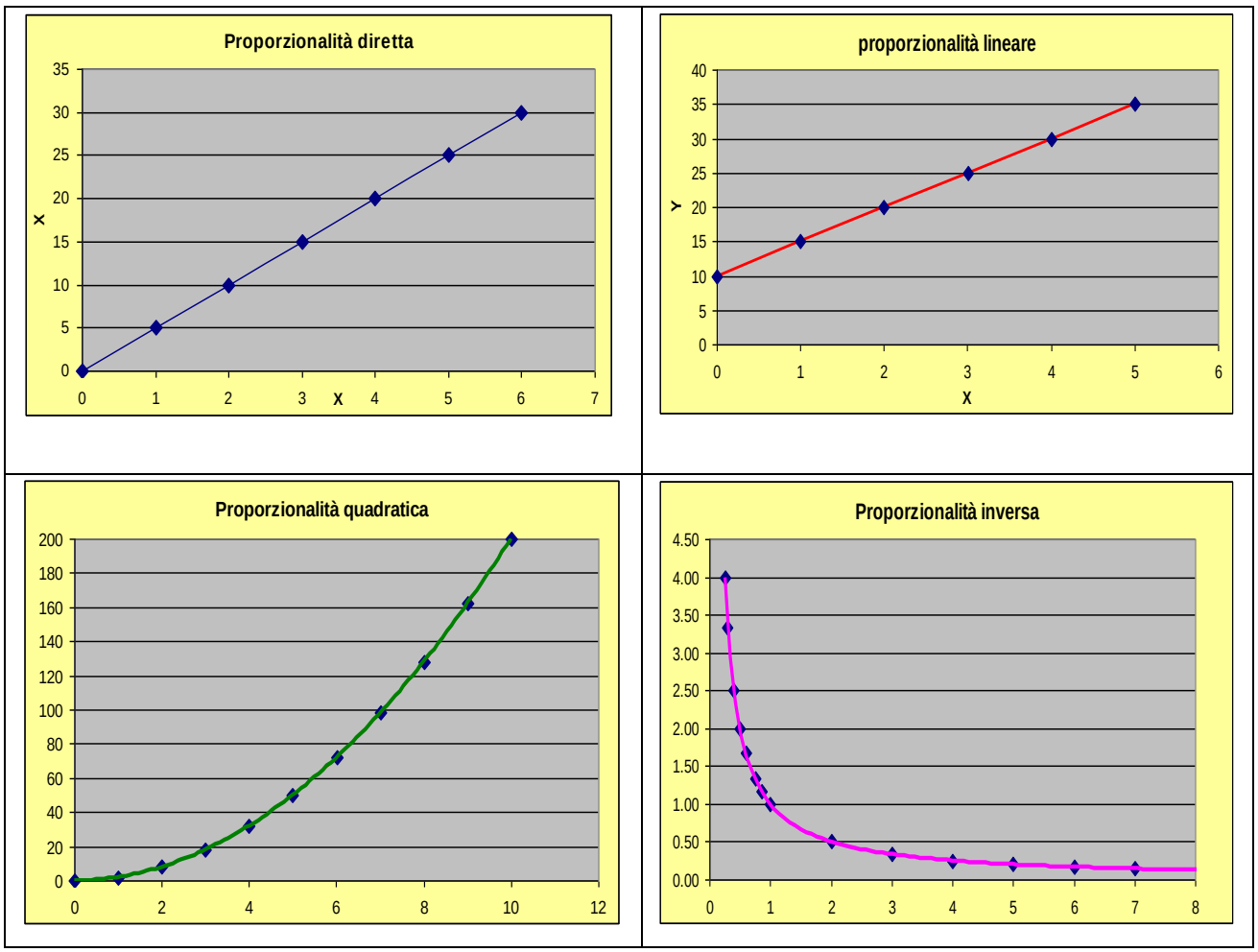


Fig. 3 - *Esempi di proporzionalità*

4.2 La regressione lineare con il metodo dei minimi quadrati

Poiché ogni misura è sempre affetta da un certo errore casuale, è praticamente impossibile che i punti sperimentali in un grafico cartesiano cadano perfettamente su una delle curve esposte del paragrafo precedente. Questo fatto può complicare non poco la scelta del tipo di proporzionalità che deve interpretare i dati ottenuti in laboratorio. Infatti, anche quando può sembrare evidente che i valori ottenuti giacciono su una retta del tipo

$$y = mx + q$$

è bene prestare particolare attenzione alla scelta dei parametri m e q perché, in prima analisi, possono essere molte le rette che approssimano i punti del grafico. Ricordiamo ancora una volta che il

coefficiente m rappresenta il coefficiente angolare della retta, mentre il termine q individua il valore dell'intersezione tra questa e l'asse Y delle ordinate.

Il problema, in definitiva, è il seguente: *tra tutte le rette possibili che si avvicinano ragionevolmente ai punti sperimentali, come operare la scelta migliore?*

Il problema è risolto applicando un complesso procedimento matematico che ha nome di **metodo dei minimi quadrati.** Consideriamo dei dati che soddisfano, almeno in prima approssimazione, una relazione di tipo lineare. Sia $y = mx + q$ l'equazione di una generica retta che si "avvicina" alla maggior parte dei punti del grafico. Il problema consiste nel determinare i valori del coefficiente angolare m e del termine noto q in modo che questa retta sia il più possibile vicina a tutti i punti sperimentali.

Il procedimento che è di seguito brevemente spiegato viene facilmente svolto da una comune calcolatrice tascabile o da un foglio elettronico come "Microsoft Excel" e prende il nome di *regressione lineare eseguita con il metodo dei minimi quadrati.*

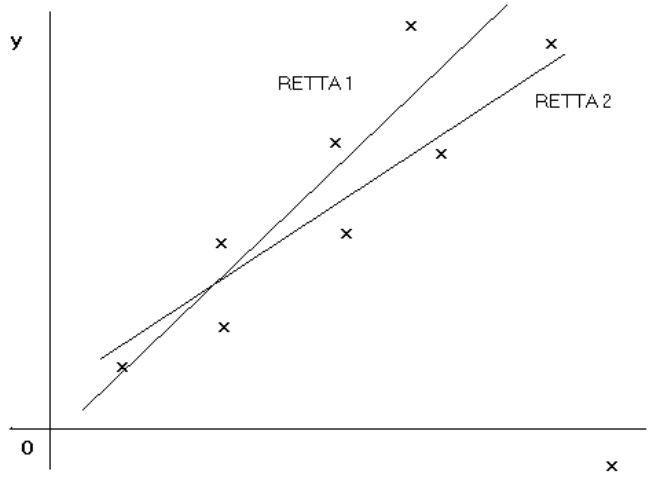


Fig. 4 - *Il metodo dei minimi quadrati consente di calcolare la retta che meglio approssima tutti i punti sperimentali riportati in un grafico cartesiano. Nell'esempio in figura, il metodo ci permette di compiere la scelta migliore tra la retta 1 e la retta 2.*

Dopo avere scritto le misure (X,Y) in "Excel" sotto forma di tabella, il programma va a confrontare la distanza tra la posizione reale del punto nel grafico e quella che esso dovrebbe avere in assenza di errori sperimentali se fosse posizionato perfettamente su una retta. Questa distanza algebrica tra la situazione reale e quella teorica è detta *scarto*.

Il procedimento è ripetuto per tutti i punti a partire da una generica retta fissata a priori. Per evitare di avere quantità di segno negativo, si esegue il quadrato di ogni scarto e poi si calcola la loro somma. Tra tutte quelle testate dal programma (e sono potenzialmente infinite), la retta cercata, cioè quella che approssima al meglio tutti i dati sperimentali passando il più possibile vicino ad essi, è quella per cui *la somma del quadrato degli scarti assume valore minimo.* Da qui il nome del metodo.

Un giudizio qualitativo, facilmente eseguibile "ad occhio", sulla bontà della retta interpolante può essere ottenuto osservando il grafico: i punti dovrebbero dividersi più o meno equamente tra la zona superiore e quella inferiore rispetto alla retta di regressione, e quest'ultima dovrebbe attraversare tutte le **barre d'errore** associate ai punti. Le barre d'errore sono due segmenti, uno orizzontale e uno verticale, centrati su ogni punto del grafico. Il loro significato è di rendere visibile con un intervallo di oscillazione in ascissa e in ordinata *l'errore assoluto che accompagna ogni misura sperimentale (e quindi la corrispondente incertezza nella posizione di ogni punto del grafico).*

Una "buona" retta di regressione dovrebbe attraversare tutte (o quasi tutte) le barre d'errore. Se invece si allontana molto da esse, è lecito avere il sospetto che qualcosa non ha funzionato come avrebbe dovuto nello svolgimento dell'esperimento oppure nell'interpretazione matematica delle misure.

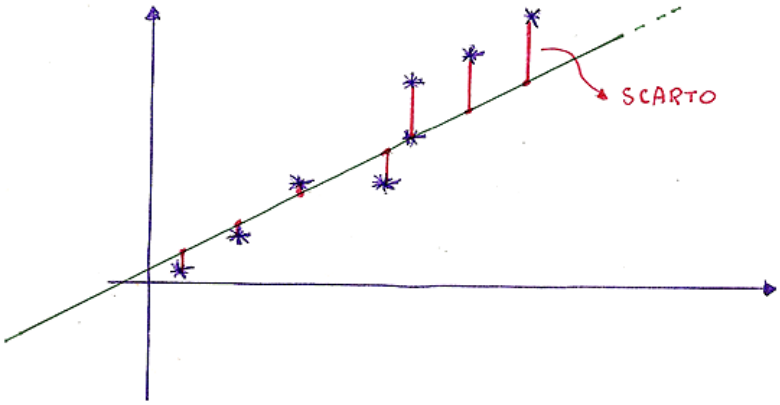


Fig. 5 - *In rosso è segnato lo scarto tra la posizione reale del punto sperimentale e quella teorica che esso dovrebbe assumere (sulla retta) se non ci fossero gli errori casuali. La miglior retta è quella per cui la somma dei quadrati di tutti gli scarti assume valore minimo.*

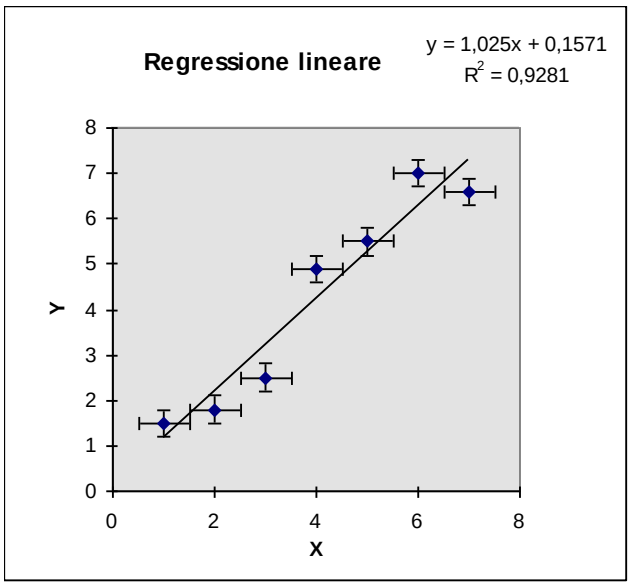


Fig. 6 - *La retta di regressione lineare attraversa tutte le barre d'errore e quindi interpreta in modo corretto la proporzionalità esistente tra i dati sperimentali.*

4.3 Relazioni non lineari

Il metodo dei minimi quadrati si può applicare anche se i punti sperimentali non soddisfano una relazione di tipo lineare (ad esempio quadratica, inversa o quadratica inversa) a condizione di operare un processo di *linearizzazione*.

Supponiamo, a tal fine, di avere dei dati che siano consistenti con una relazione di tipo parabolico

$$y = k\,x^2$$

Se riportiamo in un grafico cartesiano i punti corrispondenti alle misure, questi si disporranno lungo una parabola. Eseguiamo ora la seguente sostituzione:

$$Z = x^2$$

Costruiamo nuovamente il grafico, ma mettendo i valori di Z sull'asse delle ordinate. Otteniamo l'equazione:

$$y = k\,Z$$

che è una relazione di tipo lineare tra le variabili y e Z che rende possibile l'applicazione del *metodo dei minimi quadrati* come spiegato in precedenza.

Facciamo un esempio pratico: i dati riportati in tabella sono legati da una relazione di tipo parabolico $y = x^2$, per cui, riportati in un grafico cartesiano, si dispongono su una parabola e non su di una retta. Se però eseguo la sostituzione:

$$Z = x^2$$

e riporto in grafico le due variabili Z e y, i punti si dispongono ora su di una retta passante per l'origine. Si è così ottenuta la linearizzazione di una proporzionalità che in origine era parabolica. Su questi punti posso ora eseguire l'applicazione del metodo dei minimi quadrati.

X	0	1	2	3	4	5	6
Y	0	3	12	27	28	75	108
Z^2	0	1	4	9	16	25	36

Tab. 1 - *Esempio di linearizzazione dei dati.*

Il procedimento di linearizzazione può essere compiuto su tutti i tipi di relazione che abbiamo trattato eseguendo le opportune sostituzioni. In particolare, nel caso di una proporzionalità inversa bisogna eseguire la sostituzione

$$Z = \frac{1}{x}$$

Per linearizzare una proporzionalità quadratica inversa sarà più utile la relazione

$$Z = \frac{1}{x^2}$$

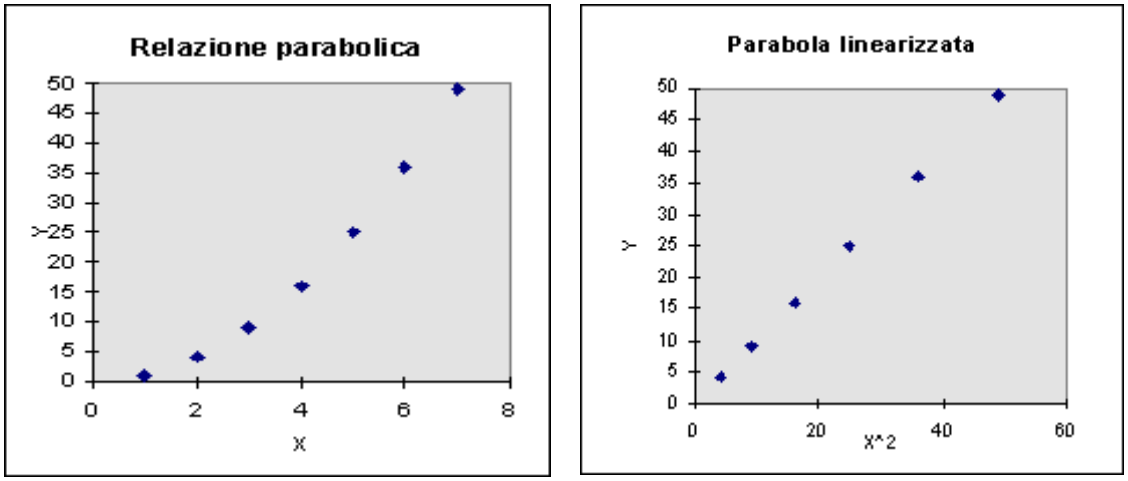


Fig. 7 – *Linearizzazione di una relazione parabolica: si noti come nel secondo grafico è stato posto il valore di x^2 sull'asse delle ascisse.*