**DIDATTICA DELLA GEOMETRIA**

**SSIS**

**Indirizzo Informatico-Fisico-matematico**

## L'insegnamento della geometria nella scuola secondaria: sviluppo storico

Nella storia della scuola superiore italiana la geometria ha un posto di grande rilievo.

Fino al 1870 ed oltre, la ***geometria di Euclide*** era considerata la scienza più sicura dal punto di vista dei contenuti e quella più perfetta dal punto di vista del metodo.

Nell'Italia unitaria l'adesione scolastica al testo euclideo si è realizzata quasi subito:

- le speciali commissioni che vennero formate per proporre i nuovi programmi scolastici riuscirono ad ottenere che nei ginnasi-licei si studiassero gli elementi di Euclide. (***legge Coppino*** del 1867).
  Questa introduzione era fatta sulla base del convincimento che la matematica deve avere un valore formativo (essere "*ginnastica del pensiero*") e avviare "*a ragionare, a dimostrare, a dedurre*".

Il ritorno a Euclide era una reazione ai libri circolanti in Italia, sia quelli di modesta qualità, sia il famoso manuale di ***Legendre*** "*Eléments de géométrie*"che ebbe molta fortuna in Europa e anche in Italia per tutto il XIX secolo. Ciò che si rimproverava a Legendre era l'aver contaminato con metodi aritmetici e algebrici l'opera di Euclide, "*il più perfetto modello di rigore geometrico*" (ad es., retta era definita come linea di minima distanza fra due punti)

- I programmi Coppino dettero l'avvio alla pubblicazione di numerosi manuali italiani tutti basati sul metodo assiomatico-deduttivo.
  Molti testi editi fra la fine dell'Ottocento e i primi decenni del Novecento sono di ottimo livello (alcuni sono citati in edizioni critiche degli *Elementi* di Euclide come interessanti ed autorevoli interpretazioni di tale testo)
- Negli ultimi anni del secolo ci furono vari dibattiti in cui si contrapponevano il punto di vista in difesa del rigore, per lo più sostenuto dagli accademici, e quello più sensibile ai problemi della classe, in genere sostenuto dagli insegnanti, che evidenziavano l'inutilità di un insegnamento non recepito dagli studenti.
- Con la ***riforma Gallo*** del 1900 si arrivò a ripristinare nel ginnasio l'insegnamento della geometria intuitiva.
  A tale proposito ***Enriques*** ed ***Amaldi*** nella prima edizione del loro testo "*Elementi di Geometria*" (1903), ritenendo che l'intuizione svolga nell'insegnamento della geometria un ruolo non secondario al rigore, affermano che "*un trattato elementare di geometria deve soddisfare a due ordini di esigenze: scientifiche e didattiche*" e ancora "*la geometria è scienza d'osservazione e di ragionamento: essa deve educare nei giovani queste due facoltà*".
- Nel 1923, con la ***riforma Gentile***, si assiste ad un drastico cambiamento dei programmi scolastici che trascurano gli studi scientifici, considerando valide ai fini della formazione culturale degli allievi le sole discipline umanistiche.
  L'insegnamento della matematica viene *ridotto* quantitativamente e qualitativamente e si ripristina la *geometria intuitiva* nel primo biennio delle superiori senza però scopi propedeutici per gli anni successivi

- Nei programmi del 1940 ***(legge Bottai)***, torna a crescere l'interesse per la matematica e per la geometria in particolare. Viene suggerito "*l'uso sistematico di esercizi ed esempi in modo che l'allievo possa cogliere le proprietà geometriche trovandosi di fronte a situazioni problematiche da risolvere con gli strumenti a sua disposizione*".
- Anche immediatamente dopo la riforma Gentile (nonostante le indicazioni dei programmi che relegavano la matematica a disciplina di secondaria importanza) la trattatistica italiana continuava a mantenersi comunque su un buon livello. Specialmente per quanto riguarda la *geometria*, i libri di testo presentavano un'impostazione rigorosa di tipo logico-deduttivo, mentre la *geometria intuitiva* - che nella riforma di Gentile era considerata fine a se stessa - assume un carattere prettamente preparatorio alla geometria razionale.
- A grandi linee si può dire che fino al 1970 la geometria insegnata nelle scuole italiane si rifaceva al testo di F. Enriques e U. Amaldi (che ebbe numerose successive riedizioni dopo quella del 1903). Questo libro, nato sulla scia della sistemazione assiomatica hilbertiana, si può considerare il *punto culminante* di una *ristrutturazione dell'insegnamento della geometria* iniziata subito dopo la nascita dello stato italiano

Come si è visto, la geometria euclidea è sempre stata uno dei *temi portanti* dei programmi di matematica della nostra scuola

**tuttavia**

è stata proprio questa adesione allo spirito degli *Elementi* che ha determinato un ostacolo nei confronti di nuovi sviluppi dei contenuti e dei metodi della geometria

Il modello euclideo era *didatticamente* ben sperimentato (anche per produrre strumenti di valutazione) e riusciva perciò difficile lasciare un terreno sicuro e collaudato per avventurarsi verso altri modi di far geometria (geometria affine o proiettiva, le trasformazioni, il metodo delle coordinate,…)
Verso la metà del Novecento, però, anche nella scuola arriva qualche accenno di crisi del modello euclideo, insieme all'eco delle grosse novità prodotte nella matematica avanzata dalla rivoluzione bourbakista.

Il **movimento bourbakista**, da un lato, si richiamava esplicitamente alla tradizione dimostrativa della matematica greca
(l'Introduzione agli *Eléments de mathématiques* inizia così: *"Depuis le Grecs, qui dit mathématique dit demonstration"*)
dall'altro si proponeva di ridurre la matematica alla teoria degli insiemi
(*"il est possible… fair dériver presque toute la mathématique actuelle d'une source unique, la Théorie des Ensembles"*)

Per la geometria, sottomettersi a questa operazione significava perdere la libertà di operare che le è caratteristica ed adattarsi a divenire un'applicazione dell'algebra lineare.

Questa via è stata seguita in molte università ed ha influenzato profondamente la riforma della scuola francese degli anni '70 (come è noto anche questa riforma è andata in crisi per l'inefficacia didattica dei suoi principi ispiratori).

- L'intero insegnamento della geometria diventa oggetto di un ampio dibattito anche in Italia sebbene non si siano avuti le adozioni e i rigetti osservati in altri paesi
  Di fatto, anche se mai ufficializzata nei programmi, la geometria euclidea scompare in molte scuole o è al più presente come geometria analitica.

"*Il glorioso passato della geometria pareva concludersi in un triste crepuscolo…*" (***Speranza***)

- I nuovi programmi delle scuole superiori, proseguendo nella linea di quelli della scuola dell'obbligo, riservano invece un posto importante alla geometria.

**Riflessioni sulle interazioni tra geometria e cultura**

Per secoli la geometria ha ispirato gli studi epistemologici e più in generale filosofici.

- La geometria aveva suggerito a Platone la teoria del ***mondo delle idee*** (*"la conoscenza geometrica è conoscenza di ciò che sempre è"*) [Repubblica, libro VII, IX].

- Per Kant la giustificazione della geometria è stata una motivazione per la sua teoria dei ***giudizi sintetici a priori***: la geometria euclidea non è altro che un insieme di giudizi sintetici, universalmente e necessariamente validi, sugli oggetti di esperienza
  Quindi, in particolare, la geometria euclidea è "*vera*" perché non è pensabile una teoria diversa.

La teoria kantiana è però andata in crisi proprio su questo campo con l'avvento delle geometrie non euclidee.
La rivoluzione legata alle geometrie non euclidee ha imposto pertanto il superamento del sogno, condiviso dai matematici e dai filosofi razionalisti da Platone a Kant, che esistesse una conoscenza perfetta e sicura.

Il superamento è avvenuto in due direzioni opposte (conciliabili per certi scopi):

- la liberazione dall'obbligo di conformarsi ad una realtà ultrasensibile, a "principi evidenti", che si è concretizzata nel ***filone convenzionalista***
  (gli assiomi della geometria non sono giudizi a priori, né fatti di esperienza, ma *pure convenzioni*; sono quindi possibili diverse geometrie e noi scegliamo quella più conveniente e più comoda per i nostri scopi).
  Questo filone si è innestato nel ***formalismo*** spinto, secondo il quale la matematica è solo un sistema di segni (anzi di significanti) e di "regole del gioco".
- la consapevolezza che la geometria è anche una scienza sperimentale, in quanto si può porre il problema se una sua affermazione (per es., il *V postulato*), o la teoria stessa, sia conforme o no all'esperienza.
  Entro certi limiti la risposta è positiva: la geometria euclidea è *la più indicata per le applicazioni pratiche*, sia per la sua maggiore semplicità, sia perché lo studio della fisica ci assicura che non vi sono discordanze apprezzabili fra i dati rilevabili con gli strumenti a nostra disposizione e i risultati che si ottengono applicando le leggi della geometria di Euclide).
  Esperienze sofisticate hanno però avvalorato la teoria generale della relatività e il fatto che quando entrano in gioco certe distanze di ordine astronomico è più conveniente adoperare la geometria di Riemann (ellittica).
  Naturalmente la geometria come è intesa oggi a livello accademico si situa nel *filone convenzionalista e formalista*.

Per chi però si deve avvalere di tale disciplina, dall'insegnante di scuola preuniversitaria, al fisico, all'ingegnere, il *problema dell'applicabilità al mondo fisico è fondamentale* e non può essere trascurato. Questo comporta che si riconoscano più livelli, e che in alcuni di questi non vi sia una netta separazione tra geometria e fisica.

***"La geometria è***
***una schematizzazione estrema***
***delle nostre esperienze sensoriali***
***e di movimento"***

**F. Speranza**

**La geometria nei programmi scolastici**

I programmi di matematica per i vari livelli di scuola sono stati pubblicati negli anni sotto indicati:

- **Scuola elementare - *1985***
- **Scuola media - *1979***
- **Biennio superiore - *1991***
- **Triennio superiore –**

I programmi per la scuola media seguono la riforma di istituzione della scuola media unica realizzatasi nei primi anni '60.
La principale innovazione a livello organizzativo:

*l'associazione dell'insegnamento della matematica a quello delle altre scienze e l'affidamento dello stesso ad un unico insegnante.*

I motivi della scelta:

- *dare impulso all'insegnamento scientifico in modo da equilibrare studi letterari e scientifici*
- *promuovere l'integrazione tra matematica e scienze ed esaltare il metodo scientifico (mantenendo la distinzione tra leggi sperimentali e leggi matematiche)*

Nei programmi della scuola dell'obbligo la ***geometria*** è presentata come

***scienza sperimentale***

dalle forti interazioni con l'esperienza fisica.

In quelli della scuola superiore, la geometria assume progressivamente i caratteri di

***scienza teorica***

Si attua il passaggio dall'intuizione e scoperta di proprietà geometriche alla loro descrizione razionale.
La trattazione assiomatica è rinviata all'ultimo anno del triennio.

**La geometria nei programmi della Scuola Elementare**

Il mutamento di prospettiva sull'insegnamento della geometria, e più in generale della matematica, avvenuto con i programmi della scuola media del 1979, si ha in modo ancora più marcato nei programmi della scuola elementare che tengono conto dei risultati della ricerca didattica fino ai primi anni '80.

*RUOLO DELLA MATEMATICA*
La matematica è vista come
*mezzo di educazione del pensiero nei suoi vari aspetti di: intuizione, immaginazione, progettazione, ipotesi e deduzione, controllo*

*METODOLOGIA*
L'educazione matematica è il risultato della attivazione di processi individuali che si sviluppano attraverso l'osservazione della realtà, l'attività di matematizzazione, la risoluzione di problemi e la conquista dei primi livelli di formalizzazione.

*INNOVAZIONI*

E' evidente

- il superamento della visione frammentaria della geometria, circoscritta alla presentazione di poche e particolari figure geometriche (piane o solide)

- la proposta di una visione della geometria come ***esplorazione*** dell'ambiente in cui si è immersi.

In quest'ottica si inquadrano:
- lo studio dei percorsi
- l'introduzione di sistemi di riferimento (sia in relazione ad un osservatore, sia assoluti)
- l'approccio dinamico al concetto di angolo
- l'attenzione alle relazioni di parallelismo e perpendicolarità tra rette
- l'osservazione e la rappresentazione sul piano di posizioni di una figura e del risultato di suoi spostamenti rispetto a traslazioni, rotazioni, simmetrie

Particolarmente interessante è lo spazio dato ad ***attività di manipolazione*** per la costruzione di modelli di oggetti, attività che precedono quelle ***di rappresentazione*** su carta, prima a mano libera, poi con l'uso di riga, squadra e compasso (attenzione rivolta al disegno geometrico).
Anche i contenuti tradizionali legati alla ***misura*** sono visti in una concezione nuova . Ad esempio si fa riferimento:

- allo studio della equiestensione di figure per scomposizione o ricomposizione
- alla determinazione approssimata di aree e volumi di superfici irregolari per far cogliere la particolarità dei casi usualmente considerati.

E' interessante lo spazio dato allo studio delle ***figure geometriche*** anche da punti di vista diversi dall'usuale (es., *classificazione di triangoli e quadrangoli rispetto alle loro simmetrie*)

**La geometria nei programmi scolastici per la Scuola Media**

I programmi del ’79 per la matematica mirano a costruire un’immagine più adeguata della disciplina riducendo tecnicismi e regole e dando spazio ad un insegnamento basato sull’***osservazione del reale*** e sullo ***studio di situazioni problematiche da matematizzare e risolvere***.

L’obiettivo comune della formazione scientifica è: ***partire dall’intuizione per poi giungere all’organizzazione e alla sintesi dei fatti osservati***.

Un’importante novità è costituita dallo sviluppo dei programmi per grandi temi, lasciando all’insegnante la scelta dello spazio da attribuire a ciascuno di essi e la programmazione delle relative attività didattiche.

Alla geometria è dato ampio spazio, ma con un’ottica nuova rispetto al passato che riflette l’***evoluzione storica della disciplina*** e le ***linee di pensiero sul suo insegnamento*** emerse dai convegni internazionali di Royaumont (1959), Dubrovnik (1960) e Bologna (1961).

I ***temi*** dedicati alla geometria sono tre:
- *la geometria come rappresentazione del mondo fisico*
- *il metodo delle coordinate*
- *trasformazioni geometriche*

Questi temi sono collegati a tre momenti significativi della ***storia della geometria***:
- *l’impostazione classica*
- *l’indirizzo cartesiano*
- *la concezione moderna rappresentata dal programma di Erlangen*

La grossa novità è che l’attenzione viene posta sullo *spazio* anziché, come era tradizione, sulle *figure*.

E’ proprio l’idea di giungere alla descrizione dello spazio che motiva:

- l’introduzione dei sistemi di riferimento
- il legame con altre discipline come la geografia (metodo delle coordinate, geometria della sfera,…) e l’educazione artistica (prospettiva, simmetria, ecc.).

L’ingresso delle ***trasformazioni geometriche*** si spiega con la possibilità che esse offrono di analizzare le proprietà dello spazio, classificandole a vari livelli.

I programmi invitano esplicitamente all’adozione di un *metodo “dinamico”* nel fare geometria come si ricava dagli Orientamenti per la lettura dei contenuti:

*“Lo studio della geometria trarrà vantaggio da una presentazione non statica delle figure che renda evidenti le proprietà nell’atto del loro modificarsi…”*
e infatti le proprietà delle figure si colgono effettivamente proprio quando si vedono le figure trasformarsi.

**E. Castelnuovo**, ispirandosi all'opera di **Clairaut** (1946), ha introdotto per prima in Italia l'aspetto dinamico nello studio della geometria come mostrano i molti libri di testo e i lavori di didattica da lei curati.

Questa concezione della geometria viene comunque ad innestarsi in una tradizione italiana di insegnamento che si limita agli aspetti metrici di particolari classi di figure, come appare evidente dalla gran parte dei testi scolastici disponibili.

**La geometria nei programmi della Scuola Secondaria Superiore**

Dal 1986, nell'ambito del piano nazionale informatica (***PNI***) sono state messe a punto proposte di programma per il biennio della scuola superiore, a cui hanno fatto seguito, nel giro di pochi anni, nuove proposte dovute alla commissione Brocca (***programmi Brocca***).

Sulla geometria i programmi Brocca appaiono più schematici di quelli precedenti del PNI, non tanto sui contenuti, quanto sulle modalità della loro trattazione.

In particolare:

- nei ***programmi del PNI*** viene lasciata all'insegnante la scelta del metodo da seguire, *assiomatico-deduttivo* (di varia natura) o *di osservazione e scoperta di proprietà geometriche e di deduzione locale*

- ***nei programmi Brocca*** si *privilegia* espressamente *questo secondo approccio* in uno spirito di continuità con la scuola media, anche se viene ribadita l'importanza di esplicitare gli assunti iniziali di ogni ragionamento.

Le indicazioni più forti dei programmi Brocca sembrano essere due:

- stimolare l'*argomentazione consapevole*

- sostenere lo *sviluppo di catene limitate di deduzioni*

L'ultima indicazione si basa sulla convinzione che la geometria all'inizio del biennio *non può* ancora *assumere il ruolo di una teoria unitaria e completa* delle proprietà dello spazio (gli studenti di questa fascia di età sono ancora immaturi per sintesi di troppo ampio respiro)

Il *metodo ipotetico-deduttivo* (assiomi, definizioni, teoremi, problema della coerenza) e gli assiomi della geometria euclidea compaiono nei programmi del quinto anno.

E' citata anche la ***geometria non euclidea*** della quale si dice che *"non sarà fine a se stessa, ma servirà a chiarire il significato di assioma e di sistema ipotetico-deduttivo"*.

Sintetizzando è possibile affermare che:

- nei programmi del PNI si privilegia il **passaggio globale-locale**, cioè si suggerisce lo studio delle proprietà del piano, per passare poi a ricavare quelle delle figure come casi particolari

- nei programmi Brocca si privilegia il **passaggio locale-globale**, cioè si invita a partire da osservazioni su certe figure per risalire gradualmente alle proprietà del piano.

Momento fondante di quest'ultimo approccio è il concetto di teoria locale, ovvero *lo sviluppo del concetto di derivazione logica di una proposizione da un insieme ben definito di premesse* (***isola deduttiva***).
In questo modo si possono presto ottenere risultati significativi, e addirittura anticipare teorie più complesse, evitando quelle dimostrazioni delle quali gli studenti finiscono per perdere il senso.

Dal punto di vista più strettamente contenutistico le ***trasformazioni*** sono l'innovazione più interessante.

Altra novità è l'inserimento della ***trigonometria*** nell'*ambito geometrico*, che è il suo ambiente naturale.

La trattazione della ***geometria dello spazio*** è limitata allo studio di esempi significativi di trasformazioni geometriche e di simmetrie in solidi particolari, anche se nel commento ai contenuti si sottolinea l'obiettivo di *alimentare ed affinare l'intuizione spaziale*.
In definitiva, fra il ***livello intuitivo/sperimentale*** della scuola dell'obbligo e quello ***assiomatico***, i programmi prevedono un livello intermedio, che si può definire di "***razionalizzazione progressiva***", in cui si rafforza da un lato la consapevolezza spaziale e dall'altro si forniscono prime sistemazioni (compresa un'idea del programma di Erlangen) e si *avvia il lavoro rigoroso della trattazione assiomatica*, fase di ripensamento logico, nella quale sarà normale dare dimostrazioni di proprietà "evidenti".

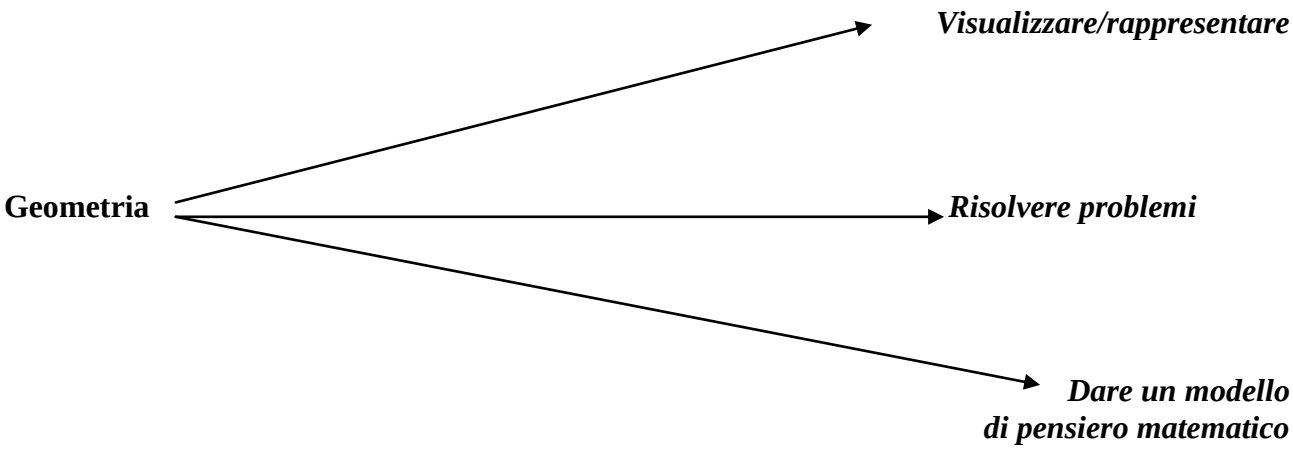
Il livello della razionalizzazione progressiva coincide con l'idea di **Vailati** (del 1907) di praticare un insegnamento teso:
*"[…] a educare e ad affinare l'attitudine dell'alunno a ragionare in modo preciso e rigoroso. Ciò che a tal fine è richiesto è soltanto questo: che ogni ipotesi, o ammissione, a cui in ciascuna dimostrazione è fatto appello, sia chiaramente riconosciuta, e formulata in modo esplicito, qualunque siano del resto le ragioni che possono aver indotto ad assumerla tra i punti di partenza del ragionamento."*

**Obiettivi dell'insegnamento della geometria**

Raccogliamo nella seguente sintesi le principali ***motivazioni*** per l'insegnamento della geometria:

- costruire una modellizzazione dello spazio fisico, creando anche un supporto nel quale studiare i fenomeni fisici
- sviluppare le capacità intuitive spaziali
- sviluppare le capacità grafiche e linguistiche
- offrire un'ampia gamma di problemi stimolanti che richiedono la messa in opera di particolari abilità
- permettere la visualizzazione di idee di altri settori della matematica
- stimolare il bisogno della dimostrazione
- abituare al ragionamento su parti circoscritte della teoria
- dare un esempio significativo di sistema assiomatico-deduttivo

***Schema riassuntivo degli obiettivi di base nell'insegnamento della geometria***




**Appendice**

Negli anni '60 nacquero in tutta Europa vari movimenti che si proponevano il rinnovamento dell'insegnamento secondario, e matematico in particolare, con programmi più stimolanti che garantissero un collegamento con gli studi universitari.

Nel 1959 si tenne a ***Royaumont*** un primo convegno che aveva l'ambizione di trasferire nelle secondarie alcuni risultati matematici recenti, opportunamente semplificati.
Tra i diversi interventi, è da ricordare quello di ***Dieudonné*** che proponeva, fra l'altro, lo studio delle trasformazioni geometriche lineari e dei gruppi in geometria piana, oltre che un'applicazione sistematica dell'algebra alla geometria, e gli elementi fondamentali della teoria degli insiemi.

Si nominò una commissione che aveva lo scopo di redigere testi consoni allo spirito innovatore (la *matematica moderna*) e che si riunì per la prima volta a ***Dubrovnik*** nel 1960.
Quanto emerse dall'ampio dibattito suggeriva l'introduzione di nuove teorie matematiche e una metodologia che avrebbe dovuto stimolare il ragazzo a definire da solo le più importanti nozioni algebriche e geometriche.

Al fine di discutere e migliorare i programmi proposti dalla commissione di Dubrovnik, la CIIM organizzò a ***Bologna*** nel 1961un convegno che varò utili indicazioni per la formazione di un programma sperimentale.

Nel 1975 si costituirono in Italia alcuni nuclei di ricerca didattica facenti capo all'UMI formati da professori universitari e medi con lo scopo di preparare e sperimentare direttamente alcuni programmi di matematica in alternativa fra di loro per il biennio della scuola secondaria.

**Osservazioni didattiche e metodologiche**

*Non è tanto importante quello che si insegna, ma come lo si insegna*

Se si vuole che l'insegnamento sia un investimento con *guadagno cognitivo* non solo *nell'immediato*, ma anche *a lungo termine*, occorre che si punti non tanto sul *capire strumentale*, quanto su quello *relazionale.*

La distinzione tra questi due tipi di capire è stata sviluppata nell'ambito della teoria dell'apprendimento.

In sintesi, il capire strumentale è il prodotto di un apprendimento meccanico di regole, teoremi e loro specifiche applicazioni. Il capire relazionale è il prodotto di un coinvolgimento personale del discente con oggetti matematici, situazioni, problemi e idee.
Ad es., la regola o il teorema imparato meccanicamente *(strumentalmente)* manca di sostanza ed ha pochissime probabilità di mettersi in *relazione* con ulteriori regole o teoremi.
Nello scegliere un percorso didattico è importante cercare di enucleare le *grandi idee*, cioè le idee portanti attorno a cui si sviluppa la teoria, e poi lavorare su di esse.

L'obiettivo deve essere quello di delineare gli aspetti essenziali della disciplina, rinunciando eventualmente ad una certa precisione o completezza nel trattare un argomento.

Inoltre è bene evitare l'inquinamento provocato dalla eccessiva attenzione ad aspetti manipolativi e di routine.

A questo proposito varie ricerche mostrano che se l'apprendimento non è ben gestito dall'insegnante, nel lungo termine tendono a rimanere i dettagli di ciò che viene insegnato a scapito delle idee generali (*sindrome da Muzio Scevola*, Furinghetti)
Alcuni elementi su cui si basa un insegnamento efficace ed efficiente possono essere individuati nei seguenti:

- interpretare con flessibilità, creatività e un po' di audacia le indicazioni dei programmi
- conoscere, interpretare e sfruttare al meglio le risorse a disposizione (libri di testo, ausili didattici "antichi" come riga e compasso o le macchine matematiche, "moderni" come i software didattici e altre tecnologie)
- dare molta importanza alla comunicazione in classe tra gli studenti e con gli studenti (il tempo impiegato nella discussione di un esercizio, darà frutti a distanza, a differenza di quello che spesso accade quando si fanno molti esercizi varianti di un modello trasmesso passivamente). Inoltre la comunicazione con i compagni è un buon addestramento alla tolleranza
- puntare sulla comunicazione al di fuori della classe con altri insegnanti, con la comunità scientifica, ecc. e documentarsi su riviste e pubblicazioni per insegnanti
- fornire agli studenti molte risorse sia in conoscenza (vari registri da attivare) che in tecnologie o strumenti meccanici e incoraggiare ad usarle al momento opportuno con flessibilità
- costruire l'esperienza matematica dello studente tenendo conto della sua personale esperienza (ossia capire se e quali concezioni, credenze, convinzioni,…, eventualmente non esplicite, lo studente ha su un certo argomento prima di affrontarlo in classe)
- portare lo studente a prendere coscienza di ciò che c'è dietro l'attività che sta svolgendo ed il proprio modo di apprendere (metacognizione)
- usare chiarezza nel contratto didattico stipulato tra insegnante ed allievo

- dare almeno una volta, anche se nella limitatezza di un contesto, l'idea di come lavora un matematico, o di che cosa vuol dire fare matematica (ripercorrere il cammino della creatività matematica, anche se su un semplice esercizio, è di aiuto a tale scopo)

Per la geometria, ricollegandosi alla fase della razionalizzazione progressiva, si possono impegnare gli studenti in attività di congettura e argomentazione, partendo da assunzioni facilmente accettabili e da proprietà significative e non banali. A tale scopo si potrebbe introdurre un modo di lavorare detto di *negoziazione dell'assioma, della definizione o del teorema*. Esso consiste nel concordare con gli studenti un insieme di fatti che possono essere accettati come punto di partenza per dimostrare.